

Van meetresultaten naar wiskundige modellen

WISKUNDE voor propedeuse Life Sciences & Technology

Opleidingen Life Sciences & Technology:

- Biologie en Medisch laboratoriumonderzoek
- Biotechnologie
- Chemie
- Chemische Technologie
- Forensisch labonderzoek
- Voedingsmiddelentechnologie

LS&T

www.lstleeuwarden.nl

een samenwerkingsverband van



**van hall
larenstein**

university of applied sciences



hogeschool

J. Nauta

J. Heijenga

P. van Dalfsen

C. Zoete

september 2019

code 16020

INHOUD

1	Van rekenen naar wiskunde	1
1.1	Vergelijkingen met 1 onbekende (getallen)	1
1.2	Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren	3
1.2.1	Haakjes wegwerken	3
1.2.2	Ontbinden in factoren	4
1.3	Breuken met getallen	5
1.3.1	Vereenvoudigen van breuken	5
1.3.2	Gelijknamig maken van breuken	5
1.3.3	Optellen en aftrekken van breuken	6
1.3.4	Vermenigvuldigen en delen van breuken	6
1.4	Breuken met letters	7
1.4.1	Optellen en aftrekken van breuken	7
1.4.2	Vermenigvuldigen en delen van breuken	8
1.4.3	Combinaties van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen	8
1.5	Vergelijkingen met 1 onbekende	9
2	Machten, wortels en logaritmen	11
2.1	Wortels (het grondtal berekenen)	11
2.2	Logaritmen (exponent berekenen)	13
3	Omwerken van formules	17
4	Van meetresultaten naar functies	21
4.1	Wiskundige modellen	22
5	Het lineaire model $y = a \cdot x + b$	23
5.1	Het grafische lineaire model	24
5.2	Opgaven lineaire modellen	24
6	Werken met logaritmen in grafieken	25
6.1	Lineaire schaalverdeling	25
6.2	Logaritmische schaalverdelingen	25
7	Het machtsmodel $y = b \cdot x^a$	27
7.1	Het grafische machtsmodel	28
7.2	Opgaven machtsmodellen	28
8	Het exponentiële model $y = b \cdot getal^{ax}$	30
8.1	Het grafische exponentiële model	31
8.2	Opgaven exponentiële modellen	33
9	Het kiezen van het juiste model	35
9.1	Samenvatting 3 modellen	35
9.2	Opgaven modelkeuze	36
9.2.1	Transmissie en extinctie	36
9.2.2	Opwarmen vat met water	37
9.2.3	Tweede orde chemisch reactie	38
9.2.4	n^e orde reactie	38

10	Uitwerkingen en antwoorden	39
10.1	Antwoorden hoofdstuk 1.....	39
10.2	Antwoorden hoofdstuk 2.....	41
10.1	Antwoorden hoofdstuk 3.....	44
10.2	Antwoorden hoofdstuk 5.....	45
10.3	Antwoorden hoofdstuk 7.....	48
10.4	Antwoorden hoofdstuk 8.....	50
10.5	Antwoorden hoofdstuk 9.....	53
11	Lijst van afbeeldingen	55

$$\begin{aligned}
 9x - 7i &> 3(3x - 7u) \\
 9x - 7i &> 9x - 21u \\
 -7i &> -21u \\
 i &< 3u
 \end{aligned}$$

$$\int e^{xy} \quad \begin{array}{l} \text{I'M} \\ \text{BRINGING} \\ \text{BACK} \end{array}$$

Solve for x:

$$\ln\left(\frac{x}{otr}\right) - 2\ln(hl) = 3 \Leftrightarrow$$

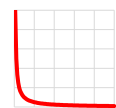
$$\ln\left(\frac{x}{h^2 l^2 otr}\right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{h^2 l^2 otr} = e^3 \Leftrightarrow$$

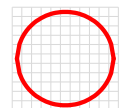
$$x = e^3 h^2 l^2 otr = \text{hellothere}$$

All you need is

$$y = \frac{1}{x}$$



$$x^2 + y^2 = 9$$



$$y = |-2x|$$



$$x = -3|\sin y|$$



Wat wordt er van je verwacht

Dit is het onderdeel wiskunde en Excel van de propedeuse van je studie. Deze wiskunde is onderverdeeld in 2 stukken van ieder 1 ec:

1. havo-wiskunde-b: algebra: werken met breuken, functies en vergelijkingen,
2. hbo-wiskunde: modellen uit meetwaarden en modellen in Excel verwerken.

Voor de hbo-wiskunde heb je de havo-wiskunde-b nodig en voor Excel heb je de hbo-wiskunde nodig. Er zijn 2 voortgangstoetsen en 2 eindtoetsen:

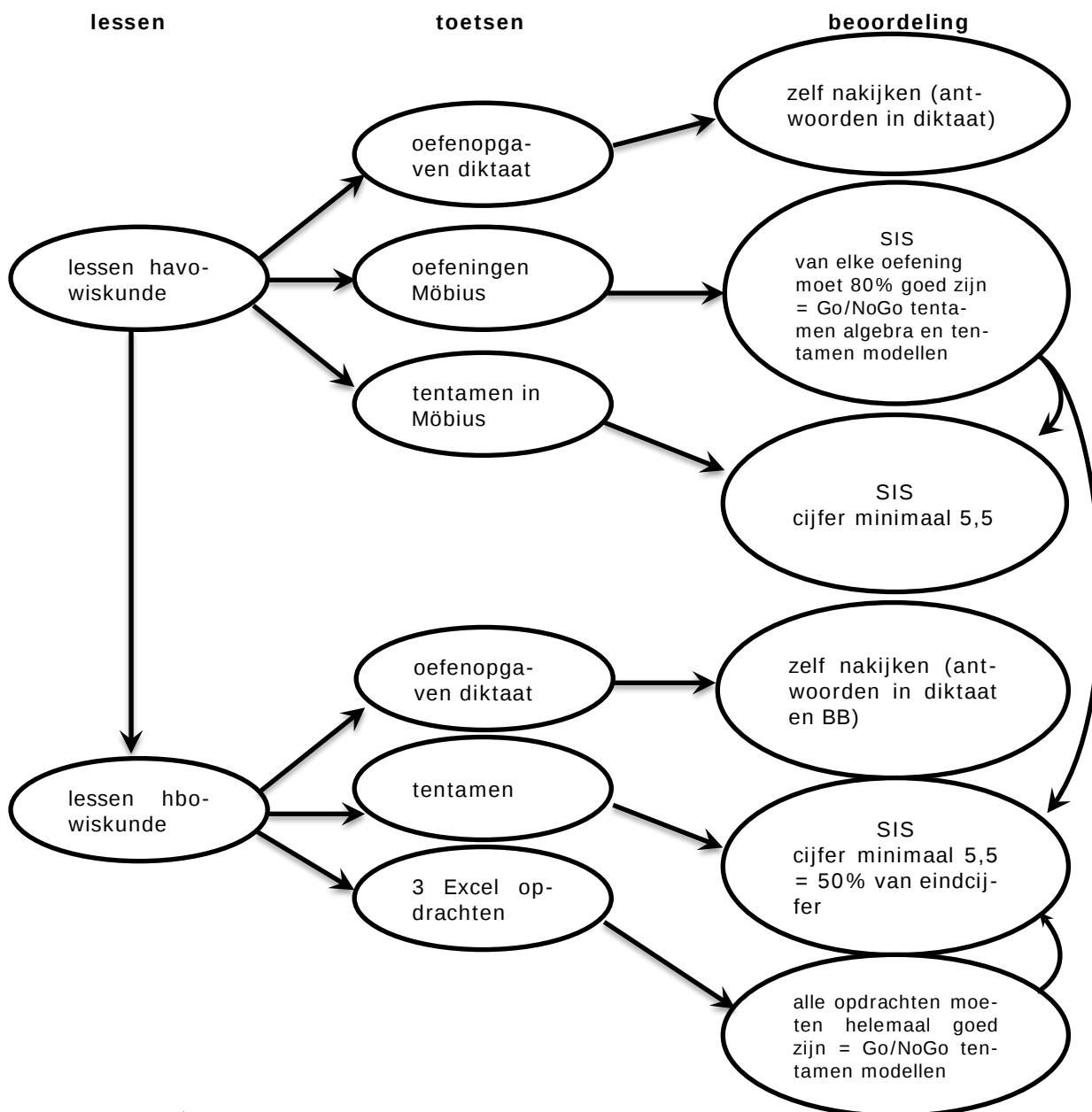
1. algebra: zelf oefenen van opgaven uit dit diktaat (3 workshops) en maken van opgaven in een computerprogramma: Maple-TA. Je krijgt geen cijfer, maar dit is een Go/NoGo voor de eindtoets. De eindtoets bestaat uit een algebra-tentamen met Maple-TA opgaven. Dit cijfer moet minimaal 5,5 zijn
2. wiskundige modellen: oefenen van opgaven uit deze bundel. Je maakt 3 wiskunde-opgaven in Excel. Je krijgt geen cijfer, maar dit is een Go/NoGo. Je krijgt een Maple-TA tentamen over de hbo-wiskunde stof en daar krijg je een cijfer voor, dat minimaal 5,5 moet zijn.

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \sin x =$$

$$\sin x = 6$$

In beide gevallen mag je pas aan het tentamen meedoen als je de voortgangstoets voldoende hebt afgerond.



De lessen havo-wiskunde-b (algebra)

De eerste 6 weken van de periode krijg je om de week les in algebra. Je kunt er voor kiezen om ook extra werkcolleges te volgen. Dit kun je vervolgens registreren als studieloopbaanbegeleiding.

Lesweek: **Lesstof algebra:**

- 1 of 2 H1. Van rekenen naar wiskunde
- 3 of 4 H2. Machten, wortels en logaritmen
- 5 of 6 H3. Omwerken van formules
- 7 of 8 uitloop en vragen
- 9 Tentamen met behulp van Möbius

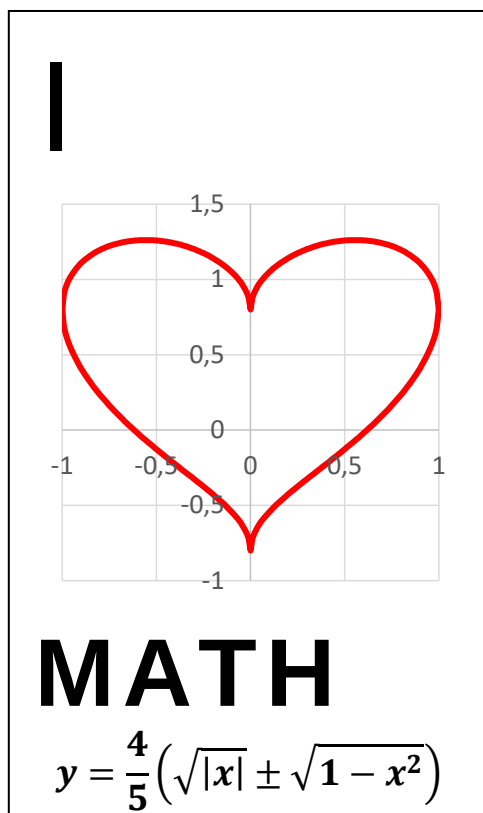
Eventueel in studieloopbaanbegeleiding:

- 2 of 3 werkcollege H1
- 4 of 5 werkcollege H2
- 6 of 7 werkcollege H3



De lessen hbo-wiskunde (modellen)

- 1 of 2 H4&5. Het lineaire model en H6&7. het machtsmodel
- 3 of 4 H8. Het exponentiële model en H9. Het kiezen van het juiste model
- 5 of 6 Excel
- 7 of 8 Excel
- 9 Tentamen wiskundige modellen



$$\pi$$

$$3,14 \mid 4,14$$

Toetsen: deadlines, voorwaarden en herkansingen

Cijfer meenemen naar volgend jaar: alles wat in SIS staat, dat neem je mee (algebratentamen, tentamen modellen) Ook de Excelopdracht neem je mee. Maar de voortgangstoetsen in Möbius neem je niet mee, die moet je volgend jaar opnieuw doen, als je voor de bijbehorende tentamens bent gezakt.

Hieronder staan de toelatingsvoorwaarden voor de tentamens en de Excelopdrachten:

Bespreek met je studieloopbaanbegeleider in welke modules welke wiskundetoets zit. Verschillende opleidingen hebben de wiskunde op andere plekken zitten. Je kunt daar erg door in verwarring raken en zelfs het verkeerde tentamen maken. Met je studieloopbaanbegeleider bespreek je:

- In welke module en in welke periode je wiskunde-algebra volgt,
- Of je werkcolleges gaat lopen en hoe je die registreert in je studieloopbaanbegeleiding,
- Wanneer (datum, tijd, lokaal) je algebratentamen is,
- Idem voor wiskunde-modellen.

Zorg dat je in de goede module staat ingeschreven, anders kan je cijfer niet genoteerd worden (je naam staat dan niet in de lijst). Je mag dan zelfs niet meedoen aan de tentamens. De wiskunde-docent kan daar niets aan veranderen! Ben je hogerejaars en moet je een toets overdoen, schrijf je dan in de module van vorig jaar in voor die toets(en).

Wiskunde-algebra tentamen:

- je mag alleen aan het Möbius tentamen meedoen, als je voor **alle** Möbius-opdrachten een score hebt van minimaal 80%. Als je voor één of meerdere toetsen een lagere score dan 80% hebt, mag je dus niet meedoen aan het wiskunde-algebra tentamen. Doe je toch mee, dan wordt je cijfer ongeldig verklaard;
- als je een onvoldoende hebt gehaald voor het tentamen wiskunde-algebra, of je had je Möbius opdrachten niet op tijd voldoende (allemaal minimaal 80% score), dan kun je je **inschrijven** voor het hertentamen in de volgende periode. Dat vindt dan plaats in week 6. Uiteraard moet je ook vóór dat hertentamen voor **alle** Möbius opdrachten een score hebben van minimaal 80%;
- haal je een onvoldoende voor het hertentamen, dan is je volgende kans volgend jaar. Helaas vervallen dan de scores voor je Möbius opdrachten. Die moet je volgend jaar dus nogmaals maken;
- het cijfer voor het wiskunde-algebra tentamen is de score gedeeld door 10. Dus een 90% score voor het tentamen is het cijfer 9,0. Je moet dus minimaal een 55% score hebben voor een voldoende;
- als er een fout in een opgave van een wiskunde-tentamen zit, dan krijg je de punten van die opgave. Dat moet wel handmatig door een docent gebeuren, dus meld het even aan je docent;
- het wiskunde-algebra tentamen is open boek. Je mag alles meenemen, behalve communicatie (laptop, tablet, mobiel). Dus wel je diktaat, aantekeningen, oude toetsen en dergelijke.

Tentamen wiskundige modellen:

- ook aan dit tentamen mag je alleen meedoen, als je voor **alle** Möbius-opdrachten een score hebt van minimaal 80%;
- het cijfer voor het tentamen wiskundige modellen is de score gedeeld door 10. Dus een 90% score voor het tentamen is het cijfer 9,0. Je moet dus minimaal een 55% score hebben voor een voldoende;
- als je een onvoldoende hebt gehaald voor het tentamen wiskundige modellen, of je had je Möbius opdrachten niet op tijd voldoende (allemaal minimaal 80% score), dan kun je je **inschrijven** voor het hertentamen in de volgende periode. Uiteraard moet je ook vóór het hertentamen voor **alle** Möbius-opdrachten een score hebben van minimaal 80%;
- haal je een onvoldoende voor het hertentamen, dan is je volgende kans volgend jaar. Als je het tentamen wiskunde-algebra hebt gehaald, dan hoeft je volgend jaar de Möbius-opdrachten niet over te doen;
- het tentamen wiskundige modellen is open boek. Je mag alles meenemen, behalve communicatie (laptop, tablet, mobiel). Dus wel je diktaat, aantekeningen, oude toetsen en dergelijke;
- Je krijgt pas een cijfer in SIS voor het tentamen wiskunde modellen, als de Excel-opdracht voldaan is. Zie onderdeel Excel.

Excel-opdracht:

- de Excel-opdracht bestaat uit 3 wiskundevragen over de 3 wiskundige modellen, die in deze cursus worden behandeld. Iedereen krijgt een eigen dataset, waardoor je allemaal een verschillende opdracht hebt. Deze opdracht wordt in periode 2 uitgereikt.
- De opdracht is pas voldaan, als alle opgaven foutloos zijn

- je krijgt pas een cijfer in SIS voor het tentamen wiskunde-modellen, als de Excel-opdracht vol-
daan is. De eerste deadline is de donderdagnacht in week 9 van de periode, waarin jouw lessen
van wisunde-modellen vallen. De tweede deadline (herkansing = nieuwe opdracht) is de donder-
dagnacht in week 6 van de periode daarop. Daarna worden de opdrachten niet meer nagekeken;
- als de Excelopdracht niet voldoende is in de herkansing, vervalt het cijfer voor het tentamen
wiskunde-modellen. Dan moet je dus volgend jaar het tentamen wiskunde-modellen opnieuw
doen.

Samengevat:

Periode 1:

- bespreek met je studieloopbaanbegeleider wanneer en in welke module je wiskunde-algebra doet
en wanner en in welke module wiskunde-modellen;

Periode van wiskunde-algebra:

- bespreek met je studieloopbaanbegeleider wanneer de tentamens zijn en schrijf je voor die ten-
tamens in;
- zorg dat alle Möbius-opdrachten een score hebben van minimaal 80% voordat je het tentamen
wiskunde-algebra gaat doen;
- de volgende periode in week 6 is het hertentamen. Als je dat moet doen, schrijf je in en zorg dat
de Möbius-opdrachten allemaal voldoende zijn.

Periode van wiskunde-modellen:

- bespreek met je studieloopbaanbegeleider wanneer de tentamens zijn en schrijf je voor die ten-
tamens in;
- zorg dat alle Möbius-opdrachten een score hebben van minimaal 80% voordat je het tentamen
wiskunde-algebra gaat doen.
- deadline opdracht Excel in week 9 op donderdagnacht. Voor het hertentamen in week 6 op don-
derdagnacht;
- de volgende periode in week 6 is het hertentamen. Als je dat moet doen, schrijf je in en zorg dat
de Möbius-opdrachten allemaal voldoende zijn.

BATTER BATTER BATTER BATTER BATTER BATTER BATTER BATMAN!

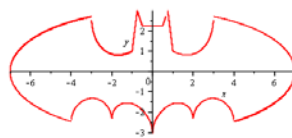
with (plots)

[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

batcurve := ((x/7)^2 * sqrt(abs(abs(x)-3)/(abs(x)-3)) + (y/3)^2 * sqrt(abs(y + 3/7 * sqrt(33))/(y + 3/7 * sqrt(33))) - 1) * (abs(x/2) - ((3 * sqrt(33)-7)/112) * x^2 - 3 + sqrt(1 - (abs(abs(x)-2)-1)^2) - y) * (9 * sqrt(abs((abs(x)-1) * (abs(x)-.75))/(1-abs(x)) * (abs(x)-.75))) - 8 * abs(x) - y) * (3 * abs(x) + .75 * sqrt(abs((abs(x)-.75) * (abs(x)-.5))/(.75-abs(x)) * (abs(x)-.5))) - y) * (2.25 * sqrt(abs((x-.5) * (x+.5))/(.5-x) * (.5+x))) - y) * (6 * sqrt(10)/7 + (1.5-.5 * abs(x)) * sqrt(abs(abs(x)-1)/(abs(x)-1)) - (6 * sqrt(10)/14) * sqrt(4 - (abs(x)-1)^2) - y);

plots:=implicitplot(batcurve, x=-7..7, y=-3..3, factor=true, scaling=constrained, grid=[100, 100], gridrefine=4);

$$\left(\frac{1}{49} x^2 \sqrt{\frac{|x|-3}{|x|-3}} + \frac{1}{9} y^2 \sqrt{\frac{|y| + \frac{3}{7} \sqrt{33}}{|y| + \frac{3}{7} \sqrt{33}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} |x| - \frac{1}{112} (3\sqrt{33} - 7) x^2 - 3 + \sqrt{1 - (|x| - 2)^2} - y \right) \left(9 \sqrt{\frac{|x|-1}{1-|x|} \frac{|x|-0.75}{|x|-0.75}} - 8 |x| - y \right) \left(3 |x| + 0.75 \sqrt{\frac{|x|-0.75}{0.75-|x|} \frac{|x|-0.5}{|x|-0.5}} - y \right) \left(2.25 \sqrt{\frac{|x-0.5|}{0.5-x} \frac{|x+0.5|}{x+0.5}} - y \right) \left(\frac{6}{7} \sqrt{10} + (1.5 - 0.5 |x|) \sqrt{\frac{|x|-1}{|x|-1}} - \frac{3}{7} \sqrt{10} \sqrt{4 - (|x|-1)^2} - y \right)$$



1 Van rekenen naar wiskunde

Wiskunde (of eigenlijk algebra) is **rekenen met letters** in plaats van cijfers. Bij rekenen kun je een rekenmachine gebruiken ($1 + 2 = 3$), bij wiskunde werkt dat niet meer ($x + y = ???$). Veel studenten vinden dit lastig. Toch gebruik je in het dagelijks leven ook algebra.

Als je op een terrasje zit en je bestelt 2 appelsap en 3 bitter lemon, dan ben je bezig met algebra. Je bestelt immers niet 5 glazen, dat is rekenen ($2 + 3 = 5$). Het gaat ook om de inhoud. Als je serveerder (m/v) bent op het terras, dan schrijf je waarschijnlijk een a op in plaats van appelsap en een b in plaats van bitter lemon. Dat scheelt tijd en inkt. Serveerders en wiskundigen zijn wat dat betreft luie mensen. Dus op je lijstje staat $2a + 3b$. En dat is algebra.

Zodra er betaald moet worden, gaan we via wiskunde over naar rekenen. Een appelsap kost €2,30 (vers geperst) en een bitter lemon €1,80. Ofwel:

$$a = 2,30$$

$$b = 1,80$$

$$2 \cdot a + 3 \cdot b = 2 \cdot 2,30 + 3 \cdot 1,80 = €10,00$$

formule substitutie rekenen

LS&T NHL VHL LEEUWARDEN		
Aantal	Omschrijving	Prijs
2	A	€2,30
3	B	€1,80
	Totaal €	

Een letter in wiskunde is dus eigenlijk een getal, maar nu nog even niet. Wiskunde is uitgesteld rekenen. Je kunt de rekenmachine niet gebruiken, dus laat je de letters ($2a + 3b$) nog even staan.

De lesstof van dit hoofdstuk is in de volgende stappen verdeeld:

1. Vergelijkingen met 1 onbekende (cijfers) $x - 12 = 2x + 4$
2. Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren
3. Vergelijkingen met 1 onbekende (haakjes) $3(x-12) + 1 = 2(2x + 4)$
4. Breuken met getallen
5. Vergelijkingen met 1 onbekende (breuken) $\frac{1}{2}x - 12 = 2x + \frac{3}{4}$
6. Breuken met letters
7. Vergelijkingen met 1 onbekende (letters) $\frac{2x-a}{x} = 4a$

1.1 Vergelijkingen met 1 onbekende (getallen)

Een uitdrukking als

$$x + 7 = 10 \quad \text{"de vraag"}$$

is een **vergelijking**. In een vergelijking komen één of meer **onbekenden** voor (x in dit voorbeeld). De kunst is om voor de onbekende een waarde te vinden, waarvoor het linkerlid (links van de =) gelijk wordt aan het rechterlid (rechts van de =). Je moet er dus in deze vergelijking voor zorgen, dat de x links van het "="-teken komt te staan en rechts een getal:

$$x = 3 \quad \text{"de oplossing"}$$

Het "="-teken geeft aan dat het linkerlid gelijk is aan het rechterlid. Bij alles wat je doet dien je ervoor te zorgen dat dat zo blijft.

Je kunt dit vergelijken met een balans. Als je links wat wegneemt, moet je dat rechts ook doen om de zaak in evenwicht te houden. Links verdubbelen betekent dat je het rechts ook moet doen. Links iets weghalen? Dan rechts hetzelfde weghalen.

Voorbeeld 1 (beginners):

$x + 7 = 10$ aan de linkerkant staat x, dat is goed. Maar er staat links ook een 7 en die moet weg: links en rechts 7 er van af halen: $\Leftrightarrow -7$

$$x + 7 - 7 = 10 - 7$$

$$x = 3$$



Voorbeeld 1 (gevorderden):

$x + 7 = 10 \Leftrightarrow$ aan de linkerkant staat x , dat is goed. Maar er staat links ook een 7 en die moet weg: als de $+7$ over de $=$ heen gaat, dan wordt het -7 :

$$x = 10 - 7 = 3$$

1. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- a. $x - 12 = 4$
- b. $x + 3 = -10$
- c. $x - 10 = -7$
- d. $x + 8 = 0$

- e. $15 - x = 6$
- f. $-x - 7 = 10$
- g. $-x - 8 = -9$
- h. $-x - 19 = 0$

Voorbeeld 2 (beginners):

$$3x + 7 = 13 \quad \Leftrightarrow -7$$

$$3x + 7 - 7 = 13 - 7$$

$$3x = 6 \quad \Leftrightarrow /3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

(gevorderden):

$$3x + 7 = 13$$

$$3x = 13 - 7 = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ kruislings
vermenigvuldigen

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

2. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- a. $-3x + 15 = 21$
- b. $-2x - 7 = 11$
- c. $-5x + 17 = 32$
- d. $-6x - 18 = 0$
- e. $2x + 9 = 12$

- f. $3x - 12 = 9$
- g. $-4x + 3 = -11$
- h. $-9x - 7 = -10$
- i. $6x + 17 = 12$
- j. $-9x - 18 = -6$

Voorbeeld 3 (beginners):

$$x + 7 = 10 - 2x \quad \Leftrightarrow + 2x$$

$$x + 7 + 2x = 10 - 2x + 2x$$

$$x + 2x + 7 = 10$$

$$3x + 7 = 10 \quad \Leftrightarrow -7$$

$$3x + 7 - 7 = 10 - 7$$

$$3x = 3 \quad \Leftrightarrow /3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

(gevorderden):

$$x + 7 = 10 - 2x \quad \Leftrightarrow$$

$$x + 2x = 10 - 7 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

3. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- a. $x - 12 = 4 + 5x$
- b. $2x + 3 = -10 + x$
- c. $3x - 10 = 2x - 7$
- d. $5x + 9 = -2x$
- e. $-2x - 7 = 2x - 10$

- f. $3x + 17 = -11 + x$
- g. $2x - 19 = 19 - 2x$
- h. $-3x + 5 = 2x - 8$
- i. $4x - 1 = -7x + 4$
- j. $2x + 12 = 9 + 4x$

Maak nu de Möbius-toets "Vergelijkingen met 1 onbekende (getallen)"

Deze toets moet voor minimaal 80% goed zijn. Je krijgt direct na de toets de uitslag.

Je mag de toets 3 keer proberen. Als je dan geen 80% hebt gehaald, neem dan contact op met de docent. Hij zal je wijzen op de theorie en je nog 1 kans geven.

1.2 Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren

1.2.1 Haakjes wegwerken

Ga voor lessen over haakjes wegwerken naar www.wisnet.nl en kies daar in het cursusoverzicht de cursus "algebra 0". Vooral de toetsapplet onder "haakjes wegwerken" is erg leerzaam.

Rekenregels:

- Gelijksoortige termen mag je optellen/afrekken: $3 \cdot a + 2 \cdot a = 5 \cdot a$
- Term voor haakjes heeft betrekking op alle termen binnen de haakjes: $5 \cdot (p - q) = 5 \cdot p - 5 \cdot q$

Voorbeeld 4 (beginners):

Los op: $4 \cdot (2 + 3)$

Dit betekent $4 \cdot 5$ en de uitkomst is natuurlijk $4 \cdot 5 = 20$. Maar als er letters staan, dan werkt het niet zo. $4(x + 3)$ kun je niet op deze manier oplossen.

Je kunt de vermenigvuldiging visualiseren met een oppervlak: oppervlak = lengte · breedte

Stel de lengte = 4 en de breedte = $2 + 3$:

2	+	3
4 opp = $4 \cdot 2$ = 8		opp = $4 \cdot 3 = 12$

$4 \cdot (2 + 3)$ betekent dus 2 oppervlakken:
 een oppervlak van $4 \cdot 2$
 en een oppervlak van $4 \cdot 3 = 12$
 dus $4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 + 12 = 20$

Dit werkt ook voor $4(x + 3)$:

x	+	3
4 opp = $4 \cdot x$		opp = $4 \cdot 3 = 12$

$4 \cdot (x + 3)$ betekent dus 2 oppervlakken:
 een oppervlak van $4 \cdot x$
 en een oppervlak van $4 \cdot 3 = 12$
 dus $4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4 \cdot x + 12$

En het werkt ook voor $(4 + 3 \cdot x) \cdot (x + 3)$:

x	+	3
4 opp = $4 \cdot x$		opp = $4 \cdot 3 = 12$
3x opp = $3 \cdot x \cdot x$ = $3 \cdot x^2$		opp = $3 \cdot x \cdot 3 = 9 \cdot x$

$(4 + 3 \cdot x) \cdot (x + 3)$ betekent dus 4 oppervlakken:
 een oppervlak van $4 \cdot x$
 een oppervlak van 12
 een oppervlak van $3 \cdot x^2$
 een oppervlak van $9 \cdot x$
 dus $(4 + 3 \cdot x) \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 12 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x$
 $= 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 9 \cdot x + 12$
 $= 3 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 12$

Voorbeeld 4 (gevorderden):

$$4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3$$

$$(4 + 3 \cdot x) \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot x + 3 \cdot x \cdot 3 = 3 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 12$$

4. Werk de haakjes weg in de volgende vergelijkingen:

- | | |
|--|--|
| a. $2 \cdot (a+b+c)$ | f. $-5 \cdot (2 \cdot x - y - z)$ |
| b. $7 \cdot (2 \cdot p + 3 \cdot q + 5 \cdot r)$ | g. $-8 \cdot (-7 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c)$ |
| c. $3 \cdot (2 \cdot p - 32 \cdot q - 4)$ | h. $-a \cdot (-b + c - 8)$ |
| d. $3 \cdot b \cdot (3 \cdot c - 4 \cdot d - 2 \cdot p)$ | i. $-r \cdot (5 - 2 \cdot t - 2)$ |
| e. $3 \cdot k \cdot (6 \cdot a \cdot b + 3 \cdot a \cdot c - 3 \cdot a)$ | j. $(a+b) \cdot (x-y)$ |

Samen nemen van gelijksoortige termen.

Het is geen rekenregel, maar wel heel handig, om de letters in een term op alfabetische volgorde te zetten. Dan wordt $x \cdot 2 \cdot a \cdot k$ geschreven als $2akx$ (de $\cdot$ ertussen hoeft je niet te schrijven, maar mag wel). Zo zie je of er gelijke termen zijn.

5. Werk de haakjes weg in de volgende vergelijkingen:

- | | |
|---|--|
| a. $-12 \cdot (12 \cdot a - 2 \cdot b) + 2 \cdot b$ | d. $7 \cdot a - (3 \cdot b - 2 \cdot a)$ |
| b. $12 \cdot a \cdot (-b - 4) + 4 \cdot b \cdot (3 \cdot a - 12)$ | e. $2 - (3 \cdot a + 2 \cdot b) + a$ |
| c. $6 \cdot a - (4 \cdot a - 3) + 2 \cdot a$ | f. $a + b - (-a - b)$ |

1.2.2 Ontbinden in factoren

- Zoek de gemeenschappelijke factor van de individuele termen.
- Schrijf deze factor buiten haakjes.

Voorbeeld 5

$45a - 50ab$ bestaat uit de losse termen $45a$ en $50ab$. Deze termen hebben beide de letter a gemeenschappelijk. Daarnaast kun je 45 en 50 delen door het getal 5. De gemeenschappelijke factor is dus in totaal $5a$. We weten dus nu:

$$45 \cdot a = 5 \cdot a \cdot 9$$

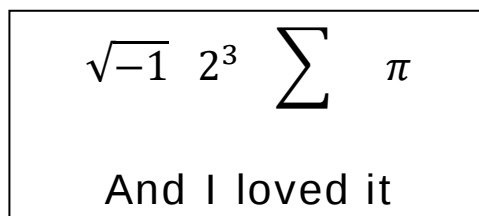
$$50 \cdot a \cdot b = 5 \cdot a \cdot 10 \cdot b, \text{ dus:}$$

$$45 \cdot a - 50 \cdot a \cdot b = 5 \cdot a \cdot 9 - 5 \cdot a \cdot 10 \cdot b = 5 \cdot a \cdot (9 - 10 \cdot b)$$

6. Haal zo veel mogelijk buiten haakjes in de volgende vergelijkingen:

- | | |
|---|---|
| a. $14 \cdot a \cdot b + 7 \cdot a \cdot c$ | f. $q \cdot b + p \cdot b$ |
| b. $-2 \cdot p \cdot q - 20 \cdot q \cdot r$ | g. $30 \cdot k + c \cdot k$ |
| c. $3 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a \cdot c + 12 \cdot a \cdot d$ | h. $t \cdot y \cdot t$ |
| d. $-2 \cdot m - 2 + 4 \cdot n$ | i. $5 \cdot p - 2 \cdot p$ |
| e. $k \cdot l \cdot a \cdot s - s \cdot t \cdot a \cdot p$ | j. $-54 \cdot p \cdot q \cdot r + 45 \cdot r$ |

Maak nu de Möbius-toets "Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren"



1.3 Breuken met getallen

Een breuk geeft een verhouding weer tussen 2 getallen: $\frac{T}{N}$.

Het getal boven de streep (T) heet teller, het getal onder de streep (N) heet noemer.

Als 3 studenten samen inschatten dat ze in totaal 2 uur moeten werken aan een opdracht (bijvoorbeeld het spitten van een tuin), dan zal elk van hen gemiddeld $\frac{2}{3}$ deel van een uur aan de opdracht werken.

1.3.1 Vereenvoudigen van breuken

Een kwartier (15 minuten) is gelijk aan $\frac{15}{60}$ deel van 60 minuten (1 uur).

Natuurlijk is 1 kwartier ook gelijk aan $\frac{1}{4}$ deel van 1 uur, vandaar de naam kwartier.

Dus: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$; De teller (15) en de noemer (60) kunnen beide gedeeld worden door 15.

We kunnen dus een breuk vereenvoudigen door zowel teller als noemer te delen door een gemeenschappelijke factor.

7. Vereenvoudig de volgende breuken tot een breuk of geheel getal (niet decimaal):

- a. $\frac{4}{8}$
- b. $\frac{17}{51}$
- c. $\frac{12}{15}$

1.3.2 Gelijknamig maken van breuken

Breuken kun je optellen, van elkaar af halen, vermenigvuldigen en delen. Vermenigvuldigen is eenvoudig, maar optellen en van elkaar af halen is best lastig.

Voorbeeld 6

Tel bijvoorbeeld $\frac{1}{5}$ Euro (€0,20) en $\frac{1}{2}$ Euro (€0,50) op. Dat wordt natuurlijk €0,70 ($\frac{7}{10}$ Euro):

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} \quad \text{Hoe werkt dat?}$$

De truc is, dat je de noemers gelijk moet maken:

$$\frac{1}{5} \text{ Euro is hetzelfde als } \frac{2}{10} \text{ Euro: vermenigvuldig de teller en de noemer beide met 2: } \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{2} \text{ Euro is hetzelfde als } \frac{5}{10} \text{ Euro: vermenigvuldig de teller en de noemer beide met 5: } \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{2}{10} \text{ Euro} + \frac{5}{10} \text{ Euro} = \frac{7}{10} \text{ Euro}$$

Voorbeeld 7

Bij het gelijknamig maken van 2 breuken is de bedoeling dat beide breuken elk worden omgezet in een gelijksoortige breuk, waarbij de 2 nieuwe breuken dezelfde noemer hebben.

$$\frac{5}{9} \text{ en } \frac{4}{21}$$

Noemer 9: schrijf als 9 = 3.3

Noemer 21: schrijf als 21 = 3.7

Beide noemers hebben het getal 3 gemeenschappelijk. De overige termen aan de rechterkant van het '='-teken neem je ook op in de nieuwe noemer:

Noemer 9: 9 = 3.3 toevoegen de 7, geeft 3.3.7 = 63

Noemer 21: 21 = 3.7 toevoegen de 3, geeft 3.7.3 = 63

Omdat we willen dat de waarde van de breuk niet verandert, vermenigvuldigen we zowel de teller als de noemer met de toegevoegde getallen:

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63} \quad \text{en} \quad \frac{4}{21} = \frac{4 \cdot 3}{21 \cdot 3} = \frac{12}{63}$$

8. Breng de volgende breuken onder dezelfde noemer:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{9}$

c. $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{24}$

b. $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$

d. $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

1.3.3 Optellen en aftrekken van breuken

Twee (of meer) breuken kunnen worden opgeteld of afgetrokken worden als ze gelijknamig zijn (dezelfde noemer hebben gekregen):

$$\frac{5}{9} + \frac{4}{21} = \frac{35}{63} + \frac{12}{63} = \frac{35+12}{63} = \frac{47}{63}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

9. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal (niet decimaal):

a. $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \frac{5}{6}$

b. $\frac{1}{3} - \frac{4}{5}$

c. $\frac{2}{7} - \frac{7}{28}$

1.3.4 Vermenigvuldigen en delen van breuken

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Bij vermenigvuldigen van breuken, vermenigvuldig je tellers met tellers en noemers met noemers. Indien mogelijk het eindantwoord vereenvoudigen.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \quad \text{en dat is eventueel te schrijven als} \quad \frac{9}{8} = \frac{8+1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde (van die breuk).

10. Bereken, met als uitkomst een breuk of geheel getal (niet decimaal):

a. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

b. $\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{-5}$

c. $\frac{-7}{-9} \cdot \frac{2}{-3}$

11. Bereken, met als uitkomst een breuk of geheel getal (niet decimaal):

a. $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}$

b. $\frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}}$

c. $\frac{\frac{2}{3}}{5}$

Maak nu de Möbius-toets "Breuken met getallen"

1.4 Breuken met letters

12. Vereenvoudig de volgende breuken:

- a. $\frac{21ab}{7b}$
 b. $\frac{2a + 4ab}{2b}$
 c. $\frac{60a}{24b - 12a}$

13. Breng de volgende breuken onder dezelfde noemer:

- a. $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$
 b. $\frac{1}{2c}$ en $\frac{1}{4c}$
 c. $\frac{1}{6x}$ en $\frac{1}{3y}$
 d. $\frac{1}{4xy}$ en $\frac{1}{12xy}$

1.4.1 Optellen en aftrekken van breuken

Twee (of meer) breuken kunnen worden opgeteld of afgetrokken worden als ze gelijknamig zijn (dezelfde noemer hebben gekregen):

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{3}{ab} = \frac{b+3}{ab}$$

$$4 - \frac{5}{a} = \frac{4}{1} - \frac{5}{a} = \frac{4a}{a} - \frac{5}{a} = \frac{4a-5}{a}$$

voorbeeld van een fout!
Don't try this at home!!

Een veel gemaakte fout is de volgende:

$$\frac{a+2}{2} = a+1$$

FOUT:

uitleg:

- Als a een appel is en 2 is €2, dan is $(a + 2)$ een (appel en 2 euromunten).
- Die appel en die 2 euromunten moet je verdelen tussen 2 personen
- Elke persoon krijgt dan een halve appel en een euromunt
- Dat is $\frac{1}{2}a + 1$ en NIET $a + 1$

14. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal:

- a. $\frac{3a}{2y} - \frac{3b}{2x}$
 b. $\frac{6p}{5q} - \frac{30}{10q}$
 c. $\frac{6}{a} - \frac{3}{b} + \frac{-4}{c} - \frac{5}{-d}$

15. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal:

- a. $\frac{2}{2a+4} + \frac{3}{a+2}$
 b. $\frac{-1}{a-b} + \frac{5}{2a-2b}$
 c. $\frac{3}{a-b} - \frac{-5-c}{-a+b}$
 d. $\frac{2-d}{ab+c} - \frac{3-d}{2ab+2c}$
 e. $\frac{a}{3a-3c} + \frac{-1}{ap-cp}$
 f. $\frac{e}{a-b} + 1$

1.4.2 Vermenigvuldigen en delen van breuken

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{3b}{4} = \frac{3ab}{4b} \text{ is te vereenvoudigen tot: } \frac{3a}{4}$$

Bij vermenigvuldigen van breuken, vermenigvuldig je tellers met tellers en noemers met noemers. Indien mogelijk het eindantwoord vereenvoudigen.

$$\frac{\frac{3}{2a}}{\frac{2}{a}} = \frac{3}{2a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde (van die breuk).}$$

16. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal:

a. $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

b. $\frac{ab}{rs} \cdot \frac{c}{t}$

c. $\frac{-p}{5} \cdot \frac{-3}{q} + \frac{6}{5q}$

17. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal:

a. $\frac{\frac{a}{2b}}{\frac{3c}{d}}$

b. $\frac{\frac{pq}{6}}{\frac{3a}{r}}$

c. $\frac{2a}{\frac{3c}{8} \cdot \frac{3b}{d}}$

1.4.3 Combinaties van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

- Bij vermenigvuldigen en delen eerst termen als breuk schrijven.
- Bij optellen, aftrekken eerst gelijknamig maken.
- Indien nodig eerst vereenvoudigen!

18. Bereken met als uitkomst een breuk of geheel getal:

a. $\frac{\frac{a}{2} + 1}{1 - \frac{a}{2}}$

c. $\frac{18a + 24b}{36ap + 48bp}$

b. $\frac{\frac{3a - 3b}{2x}}{\frac{a - b}{x}}$

d. $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{b}{q}}$

Maak nu de Möbius-toets “Breuken met letters”

1.5 Vergelijkingen met 1 onbekende

19. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 1 + \frac{5}{2}x$
- $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}x$
- $\frac{-2}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{4}{3}x - 1$
- $\frac{1}{8}x - \frac{5}{6} = x - \frac{3}{4}$

20. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- $3(x + 4) = -2(x + 8)$
- $2 - (x + 4) = -2(x + 1) - 3$
- $6(-x + 2) - (x - 3) = 3(-x + 1)$
- $2x - (-x + 1) = -3(-x + 1)$

Voorbeeld 8 (beginners):

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{4} &= x - a && \Leftrightarrow \cdot 4 \\ \frac{3x+2}{4} \cdot 4 &= (x - a) \cdot 4 && \Leftrightarrow \\ 3x + 2 &= 4x - 4a && \Leftrightarrow -4x - 2 \\ 3x - 4x - 2 + 2 &= 4x - 4x - 2 - 4a && \\ -x &= -2 - 4a && \Leftrightarrow \cdot -1 \\ x &= 2 + 4a\end{aligned}$$

Voorbeeld 9 (beginners):

$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{x-a} &= -2 && \Leftrightarrow \cdot (x-a) \\ \frac{4x-1}{x-a} \cdot (x-a) &= -2 \cdot (x-a) && \Leftrightarrow \\ 4x - 1 &= -2x + 2a && \Leftrightarrow + 2x + 1 \\ 4x + 2x &= 1 + 2a && \Leftrightarrow \\ 6x &= 1 + 2a && \Leftrightarrow /6 \\ x &= \frac{1+2a}{6}\end{aligned}$$

Voorbeeld 10 (beginners):

$$\begin{aligned}ax - b &= 3 && \Leftrightarrow + b \\ ax - b + b &= 3 + b && \\ ax &= 3 + b && \Leftrightarrow /a \\ x &= \frac{3+b}{a}\end{aligned}$$

Voorbeeld 11 (beginners):

$$\begin{aligned}a(x - 4) &= 2 - bx && \Leftrightarrow \\ ax - 4a &= 2 - bx && \Leftrightarrow + 4a \\ ax - 4a + 4a &= 2 - bx + 4a && \\ ax &= 2 + 4a - bx && \Leftrightarrow + bx \\ ax + bx &= 2 + 4a - bx + bx && \Leftrightarrow \\ x(a + b) &= 2 + 4a && x = \frac{2 + 4a}{a + b}\end{aligned}$$

(gevorderden):

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{4} &= x - a && \Leftrightarrow \text{kruislings verm.} \\ 3x + 2 &= 4(x - a) && \Leftrightarrow \text{haakjes weg} \\ 3x + 2 &= 4x - 4a && \Leftrightarrow x \text{ naar links} \\ 3x - 4x &= -2 - 4a && \Leftrightarrow \\ -x &= -2 - 4a && \Leftrightarrow \\ x &= 2 + 4a\end{aligned}$$

(gevorderden):

$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{x-a} &= -2 && \Leftrightarrow \text{kruislings verm.} \\ 4x - 1 &= -2(x - a) && \Leftrightarrow \\ 4x - 1 &= -2x + 2a && \Leftrightarrow \\ 6x &= 1 + 2a && \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1+2a}{6}\end{aligned}$$

(gevorderden):

$$\begin{aligned}ax - b &= 3 && \Leftrightarrow \\ ax &= b + 3 && \Leftrightarrow \\ x &= \frac{b+3}{a}\end{aligned}$$

(gevorderden):

$$\begin{aligned}a(x - 4) &= 2 - bx && \Leftrightarrow \\ ax - 4a &= 2 - bx && \Leftrightarrow \\ ax + bx &= 2 + 4a && \Leftrightarrow \\ x(a + b) &= 2 + 4a && \Leftrightarrow \\ x &= \frac{2 + 4a}{a + b}\end{aligned}$$

Voorbeeld 12 (beginners):

$$\begin{aligned}
 \frac{ax}{b-2x} &= c & \Leftrightarrow \cdot (b-2x) \\
 ax &= c(b-2x) & \Leftrightarrow \\
 ax &= cb - 2cx & \Leftrightarrow + 2cx \\
 ax + 2cx &= cb & \\
 x(a+2c) &= cb & \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{cb}{a+2c}
 \end{aligned}$$

(gevorderden):

$$\begin{aligned}
 \frac{ax}{b-2x} &= c & \Leftrightarrow \\
 ax &= c(b-2x) & \Leftrightarrow \\
 ax &= bc - 2cx & \Leftrightarrow \\
 ax + 2cx &= bc & \Leftrightarrow \\
 x(a+2c) &= cb & \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{cb}{a+2c}
 \end{aligned}$$

21. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

a. $\frac{1}{x+1} = 5$

b. $\frac{x}{x-4} = 2$

c. $\frac{x+7}{-3x+8} = 1$

d. $\frac{8x}{4x-4} = 2$

e. $\frac{4-4x}{x-1} = -3$

f. $\frac{2x+3}{4x} = 6$

22. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

a. $ax + b = 0$

b. $5 - px = qx - 5$

c. $2x = \frac{x-a}{b}$

d. $\frac{x-a}{b-x} = 2$

e. $\frac{3x}{x+q} = 2$

f. $\frac{3x+a}{x} = 2a$

g. $p - ax = \frac{bx+c}{q}$

h. $\frac{ax-b}{p} = \frac{a-bx}{q}$

Maak nu de Möbius-toets "Vergelijkingen met 1 onbekende (letters)"

2 Machten, wortels en logaritmen

In hoofdstuk 1 heb je een 50-tal vergelijkingen opgelost. Deze vergelijkingen hadden eigenlijk allemaal dezelfde vorm, namelijk: $ax = b$

Hierbij was x het onbekende getal en waren a en b gegeven getallen of letters.

In deze workshop richten we ons op 2 nauwelijks moeilijker vergelijkingen, te weten:

$$a^x = b \quad \text{en} \quad x^a = b$$

In beide vergelijkingen worden aan de linkerzijde getallen herhaaldelijk met zichzelf vermenigvuldigd. Deze bewerking van een getal een aantal malen met zichzelf vermenigvuldigen noemen we machtsverheffen.

Met 2^5 bedoelen we eigenlijk:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

De vergelijking: $2^x = 32$

kan dus gelezen worden als: hoe vaak moet je 2 met zichzelf vermenigvuldigen om op 32 uit te komen?

Dit is analoog aan herhaald optellen, met $5 \cdot 2$ bedoelen we eigenlijk:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

De vergelijking: $2x = 10$

kan dus gelezen worden als: hoe vaak moet je 2 bij elkaar optellen om op 10 uit te komen?

Net zoals er voor vermenigvuldigen een 'omgekeerde' bewerking is - namelijk delen - zo is er ook een omgekeerde bewerking voor machtsverheffen. Sterker nog: machtsverheffen kent zelfs twee omgekeerde bewerkingen afhankelijk van waar de onbekende staat:

$$a^x = b \Leftrightarrow$$

$$a = b^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{b}$$

$$b = a^x$$

$$x = {}^a\log(b)$$

2.1 Wortels (het grondtal berekenen)

De oplossing van de vergelijking $a^x = b$ luidt: $a = \sqrt[x]{b}$ en is te berekenen met de rekenmachine en wel als $\boxed{b} \quad \boxed{\sqrt[x]{}} \quad \boxed{x}$

Voor degene die toch meer uitleg wil kun je zeggen:

wortel trekken is omgekeerd machtsverheffen en levert een wortel op

$\sqrt[3]{8}$ betekent: welk getal levert 3 maal vermenigvuldigd met zichzelf 8 op? $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$\sqrt[a]{b}$ betekent: welk getal levert a maal vermenigvuldigd met zichzelf b op?

De a -de machts wortel trekken wordt ook wel genoteerd als een breuk in de exponent:

$$a^x = b \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{b} \quad (0)$$

Om een **grondtal** te berekenen moet je **wortel trekken**.

1. Los x op uit de volgende vergelijkingen: (laat het wortelteken staan bij opgaven e-h):

a. $x^2 = 81$

b. $(x - 5)^3 = 8$

c. $2 \cdot x^3 = 54$

d. $4 + x^5 = 247$

e. $x^2 = 83$

f. $(x - 5)^3 = 28$

g. $2 \cdot x^3 = 56$

h. $4 + x^5 = 234$

Voor **machten** met **gehele**, **gebroken** en **negatieve exponenten** gelden de volgende **rekenregels** (de toelichting heeft betrekking op positieve gehele exponenten):

(0) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ en $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ een gebroken macht is een wortel en een negatieve macht een breuk

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ m factoren a maal n factoren a is gelijk aan (m+n) factoren a

(2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ n factoren a^m is gelijk aan n.m factoren a

(3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ n factoren ab is gelijk aan n factoren a maal n factoren b

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ n factoren $\frac{a}{b}$ is gelijk aan n factoren a gedeeld door n factoren b;
b ≠ 0

(5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ als m > n, dan geldt m factoren a gedeeld door n factoren a is gelijk aan (m-n) factoren a; a ≠ 0

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ als n > m, dan geldt m factoren a gedeeld door n factoren a is gelijk aan 1 gedeeld door (n-m) factoren a; a ≠ 0

(6) $a^0 = 1$ '0 factoren a' is het resultaat verkregen uit een deling van gelijke aantallen factoren a

Op analoge wijze kunnen we ook de **eigenschappen** van **wortels** opschrijven:

(1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ dit is hetzelfde als: $(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$

(2) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ dit is hetzelfde als: $a^{\frac{m}{n}}$

(3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(4) $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

(5) $\sqrt[n]{1} = 1$

Voorbeeld 1:

$$x^5 = 32$$

denk aan voorbeeld 1: welk getal moet je 5 keer met zichzelf vermenigvuldigen om 32 te krijgen?

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$x = 2$$

algemeen:

neem van beide zijden (links en rechts van de =) de vijfde-machts wortel:

$$x = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\text{of } x = \sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^1 = 2$$

(met de rekenmachine: $\boxed{32} \boxed{\sqrt[5]{}} \boxed{5} = 2$; het kan ook $\boxed{32} \boxed{x^{\frac{1}{5}}} \boxed{5} = 2$ zijn)

Voorbeeld 2

$$(x+6)^4 = 81$$

neem aan beide zijden de vierde-machts wortel:

$$(x+6) = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

trek van beide zijden 6 af:

$$x = -6 + 3 = -3$$

2. Zet de onderstaande formules om in machten van of met x: kijk welke regel toegepast kan worden en pas die dan ook toe. Zorg dat x niet in de noemer staat.

a. $2^x \cdot 2^{x+1}$

b. $(2^{x+1})^2$

c. $(3 \cdot x)^2$

d. $\left(\frac{2}{x}\right)^3$

e. $\sqrt{2^{x+1}}$

f. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

g. $2^x \cdot 4^{x+1}$

h. $(\sqrt{x} + 1)^2$

Wetenschappelijke notatie

Zeer grote en erg kleine getallen worden omwille van de leesbaarheid en van een eerste, grove berekening geschreven in machten van tien, de wetenschappelijke notatie $g = a \cdot 10^p$, met a een decimaal getal zodat $1 \leq a \leq 10$ en p is gelijk aan het aantal cijfers tussen de nieuwe positie van de decimale komma en de oorspronkelijke positie. $p > 0$ als de komma naar links is verschoven. In plaats van $g = a \cdot 10^q$ en $g = a \cdot 10^{-q}$ schrijft men ook wel a E +q respectievelijk a E -q.

Voorbeeld 3.

$$2000 = 2 \cdot 10^3 = 2^E3$$

$$0,04 = 4 \cdot 10^{-2} = 4^E-2$$

Die E-notatie gebruik je in rekenmachines en programma's, zoals Excel. Dus geen $2 \cdot 10^3$, maar gewoon 2^E3 of $2E03$ of $2E3$.

3. Schrijf in de wetenschappelijke notatie:

- De snelheid van licht bedraagt 300 000 000 m/s
- De massa van een stofdeeltje is 0,000 000 000 753 kg
- $(5 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^5) =$
- $(7 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^2) =$
- $(6,1 \cdot 10^{-2}) \cdot (3,42 \cdot 10^{-8}) \cdot (8,125 \cdot 10^{-1}) =$

2.2 Logaritmen (exponent berekenen)

De oplossing van de vergelijking $a^x = b$ luidt: $x = \log_a(b)$ (0)

en is te berekenen met de rekenmachine en wel als $\log \boxed{b} / \log \boxed{a}$ (zie eigenschap (3) op de volgende bladzijde). Wellicht heb je in je vooropleiding de notatie $x = {}^a\log(b)$ geleerd. Dat is een verouderde notatie en internationaal is afgesproken om de notatie $x = \log_a(b)$ te gebruiken.

Voor degene die toch meer uitleg wil kun je zeggen:

logaritme nemen is de **exponent** of **macht** berekenen.

$\log_a(b)$ betekent: hoe vaak moet je a met zichzelf vermenigvuldigen om b te krijgen? Men noemt a het grondtal van de logaritme.

Notatieperikelen:

- in $\log_a(b)$ staat de a laag omdat a het grondtal is. $\log_a(x)$ is dus iets anders dan $\log(a \cdot x)$;
- In onze menselijke belevenis neemt het getal 10 een bijzondere plaats in. Wanneer men de $\log_{10}$ uit een getal b neemt, wordt de 10 meestal weggelaten en staat er $\log(b)$ in plaats van $\log_{10}(b)$;
- In de wiskunde neemt het getal e een bijzondere plaats in. Het getal e is vergelijkbaar met het getal π . Het getal π is ongeveer gelijk aan 3,14 en wordt gebruikt bij berekeningen aan cirkels. Het getal e is ongeveer gelijk aan 2,72 en wordt ook vaak - net als 10 - als grondtal genomen en soms weggelaten.

Meestal wordt de notatie **ln(b)** gebruikt, als men $\log_e(b)$ bedoelt.

→ In deze cursus bedoelen we met $\log(b)$ de logaritme met het grondtal 10 en met **ln(b)** bedoelen we de logaritme met het grondtal e.

- Machtsverheffen wordt in veel software en rekenmachines aangegeven met het symbool $\wedge$. In deze cursus zal dit ook vaak gebeuren en lees je dan:

$$a \wedge x \quad \text{is hetzelfde als} \quad a^x$$

4. Bereken met behulp van je rekenmachine:

a. $\log 2,53$

b. $\ln(7,39)$

c. $\log_3(1,5)$

d. $\log_8(15,3)$

Definitie logaritme: $\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b$ met $a > 0$, $a \neq 1$ en $b > 0$ (0)
a heet het **grondtal** van de logaritme en **x** de **macht** of **exponent**.

Voorbeeld 4:

$$\begin{array}{lll} 2^x = 32 & \text{of:} & 2^x = 32 \\ 2^x = 2^5 & & a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) \\ x = 5 & & a = 2 \quad \downarrow \\ & & b = 32 \quad \downarrow \\ & & x = x \quad x = \log_2(32) = \frac{\log(32)}{\log(2)} = 5 \end{array}$$

5. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| a. $2^x = 8$ | e. $10^x = 1000$ |
| b. $2^{3x} = 16$ | f. $10^{4x} = 10000$ |
| c. $2^{(3x-6)} = 32$ | g. $10^{(4x+1)} = 100000$ |
| d. $2^{-x} = 64$ | h. $10^{-x} = 1000000$ |

We kunnen ook vergelijkingen hebben waar de onbekende in de logaritme staat, in plaats van b. Om de logaritme die om de onbekende heen staat weg te werken, ga je de definitie (0) van de logaritme toepassen.

Voorbeeld 6:

$$\begin{array}{lll} \log_2(x) = 5 & & \text{Pas nu de definitie (0) van logaritme toe} \\ \log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b & & \\ a = 2 & & \downarrow \downarrow \\ b = x & & \downarrow \downarrow \\ x = 5 & \Leftrightarrow & 2^5 = x = 32 \end{array}$$

6. Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a. $\log_2(x) = 3$ | e. $\log(x) = 3$ |
| b. $\log_2(3x) = 4$ | f. $\log(4x) = 4$ |
| c. $\log_2(3x-6) = 5$ | g. $\log(4x+1) = 5$ |
| d. $\log_2(-x) = 6$ | h. $\log(-x) = 6$ |

Met het nemen van de logaritme berekenen we een **exponent**; in de definitie is het de exponent die je bij a moet zetten om b als antwoord te krijgen.

Hieruit volgt o.a. de betrekking: $a^{\log_a(b)} = b$ (0*)
 (Vervang in de definitie (0) in het gedeelte rechts van de gelijkwaardigheidspijl x door hetgeen links van die pijl staat).

Wisselen van grondtal

Met behulp van (0*) kunnen we gemakkelijk van het ene op het andere grondtal overgaan; bijvoorbeeld de overgang van grondtal 2 op grondtal 10:

$$2^5 = (10^{\log_{10}(2)})^5 = (10^{0,301})^5 = 10^{1,5}$$

7. Schrijf als macht

- | | | |
|---------------------------|-----------|-----------|
| Schrijf als macht van 10: | a. 2^6 | b. e^x |
| Schrijf als macht van e: | c. 10^4 | d. 10^x |

Rekenregels voor logaritmen:

$$\log_g(a) + \log_g(b) = \log_g(a \cdot b) \quad (1)$$

$$\log_g(a) - \log_g(b) = \log_g\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2)$$

$$\log_g(a^p) = p \cdot \log_g(a) \quad (3)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_g(b)}{\log_g(a)} \quad (4)$$

$$\text{Uit (4) volgt (kies } g = b): \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \quad (4^*)$$

$$\text{en ook: } \log_{\frac{1}{a}}(b) = -\log_a(b) \quad (4^{**})$$

$$\text{Verder volgt uit de definitie: } \log_a(a) = 1 \quad \text{en} \quad \log_a(1) = 0 \quad (0^{**})$$

Natuurlijke logaritme – bijzonder grondtal.

Kiezen we als **grondtal** van een logaritme het getal **e**, dan spreken we van de natuurlijke logaritme. Omdat deze logaritme vaak wordt gebruikt, heeft men een speciale notatie-afspraken gemaakt. In plaats van $\log_e(x)$ schrijft men $\ln(x)$.

Voor de **natuurlijke logaritme** gelden uiteraard ook alle eerder genoemde eigenschappen:

$$\ln(b) = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = b \quad (0)$$

$$e^{\ln(b)} = b \quad (0^*)$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b) \quad (1)$$

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2)$$

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a) \quad (3)$$

$$\ln(b) = \frac{\log(b)}{\log(e)} \quad (4)$$

Uit (4) volgt: $\ln(b) = \frac{1}{b \log(e)}$ (kies $g = b$) (4*)

8. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen (zonder elektronische hulpmiddelen):

- | | |
|-------------------------|--|
| a. $\log_9(g^p)$ | b. $\log_a(\sqrt{a})$ |
| c. $\log \frac{1}{100}$ | d. $\log_3\left(\frac{\sqrt{27} \cdot 9}{81}\right)$ |
| e. $\ln(e^{0,7})$ | f. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ |
| | g. $\ln(e^x)$ |

9. Los x op uit de volgende vergelijkingen.

- a. $\log_4(x) = 3 + \log_4(2)$
 b. $\log_4(x^2) = \log_4(2x) + 1$

10. De groei van micro-organismen kan worden beschreven met de formule $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{td}}$
 Hierbij is td de verdubbelingstijd (td = doubling time). De tijd t is meestal in minuten.

- a. Bereken de waarde van N_t als $t = td$
 b. Bereken de waarde van N_t als $t = 2 \cdot td$
 c. Bereken de waarde van N_t als $t = 3 \cdot td$
 d. Uit het voorgaande kun je nu concluderen dat: als de tijd t weer td verder is dan

Uit experimenten blijkt, dat de groei van het aantal micro-organismen wordt gegeven door $N_t = 75 \cdot 2^{0,026 \cdot t}$. De tijd t is in minuten.

- e. Bereken het aantal micro-organismen op $t = 0$.
 f. Bereken de verdubbelingstijd td (vergeet de eenheid niet).
 g. Bereken het aantal micro-organismen op tijdstip $3 \cdot td$

Uit andere experimenten blijkt dat de groei van een bepaald soort micro-organismen wordt gegeven door $N_t = 130 \cdot 10^{0,018 \cdot t}$

- h. Herschrijf deze uitdrukking naar een uitdrukking met grondtal 2.
 i. Wat is de verdubbelingstijd van dit micro-organisme.
 j. Bereken het aantal micro-organismen op tijdstip $4 \cdot td$

11. De afdding van micro-organismen (bijvoorbeeld door verhitting) kan worden beschreven met de formule $N_t = N_0 \cdot 10^{\frac{-t}{D}}$

Hierbij is N_t het aantal micro-organismen op een tijdstip t , N_0 het aantal micro-organismen bij de start van het experiment en D de decimale reductietijd. De tijd t is meestal in minuten.

- a. Bereken de waarde van N_t als $t = D$
 b. Bereken de waarde van N_t als $t = 2 \cdot D$
 c. Bereken de waarde van N_t als $t = 3 \cdot D$
 d. Uit het voorgaande kun je nu concluderen dat: als de tijd t weer D verder is dan

Uit experimenten blijkt, dat de afdding van een bepaald micro-organisme, dat op een bepaalde temperatuur wordt verhit, wordt gegeven door de formule $N_t = 450 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,62 \cdot t}$. De tijd t is in minuten.

- e. Bereken het aantal micro-organismen op $t = 0$
 f. Bereken de decimale reductietijd D (vergeet de eenheid niet).

- g. Bereken het aantal micro-organismen op tijdstip $3 \cdot D$
Uit andere experimenten blijkt, dat de afdoding van van een bepaald micro-organisme, dat op een bepaalde temperatuur wordt verhit, wordt gegeven door de formule: $N_t = 140 \cdot 10^3 \cdot 2^{-0,28 \cdot t}$. De tijd t is in minuten.
- h. Herschrijf deze uitdrukking naar een uitdrukking met grondtal 10
i. Hoe groot is de decimale reductietijd D van dit micro-organisme
j. Bereken het aantal micro-organismen op tijdstip $4 \cdot D$

12. De afkoeling van een lichaam kan worden beschreven met de formule $T_t = T_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

Hierbij is T_t (in °C) het verschil tussen de temperatuur op tijdstip t en de temperatuur na oneindig lang afkoelen (de stationaire temperatuur) en τ is de tijdconstante. De tijd t kan in elke tijdseenheid zijn. Bij het afkoelen van een zón in eonen en het afkoelen van een kopje koffie in minuten.

- a. Bereken de waarde van T_t als $t = \tau$
b. Bereken de waarde van T_t als $t = 2 \cdot \tau$
c. Bereken de waarde van T_t als $t = 3 \cdot \tau$
d. Uit het voorgaande kun je nu concluderen dat: als de tijd t weer τ verder is dan
Uit experimenten blijkt, dat de afkoeling van het lichaam van een overleden mens, wordt gegeven door de formule $T_t = 27 \cdot e^{-0,06 \cdot t}$. De tijd t is in uren.
- e. Bereken het temperatuursverschil T_0 op $t = 0$
f. Bereken de tijdconstante τ (vergeet de eenheid niet)
g. Bereken het temperatuursverschil T_t op $t = 3 \cdot \tau$
Uit andere experimenten blijkt, dat de afkoeling van van een kopje koffie wordt gegeven door de formule: $T_t = 50 \cdot 10^{-0,05 \cdot t}$. De tijd t is in minuten.
- h. Herschrijf deze uitdrukking naar een uitdrukking met grondtal e
i. Hoe groot is de tijdconstante τ (vergeet de eenheid niet)
j. Bereken het temperatuursverschil op tijdstip $2 \cdot \tau$

13. De afname van de radioactiviteit van een element kan worden beschreven met de formule

$$N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{t_{1/2}}}$$

Hierbij is N_t een maat voor de radioactiviteit op tijdstip t en $t_{1/2}$ de halwaardetijd. De tijd t kan in elke tijdseenheid zijn. Bij jodium-131 is de halfwaardetijd 8 dagen en bij uranium-238 4,5 miljard jaar.

- a. Bereken de waarde van N_t als $t = t_{1/2}$
b. Bereken de waarde van N_t als $t = 2 \cdot t_{1/2}$
c. Bereken de waarde van N_t als $t = 3 \cdot t_{1/2}$
d. Uit het voorgaande kun je nu concluderen dat: als de tijd t weer $t_{1/2}$ verder is dan
Uit experimenten blijkt, dat de afname van de radioactiviteit van een element wordt gegeven door de formule $N_t = 8,3 \cdot 10^6 \cdot 2^{-0,031 \cdot t}$. De tijd t is in jaren.
- e. Bereken de radioactiviteit N_0 op $t = 0$
f. Bereken de halfwaardetijd $t_{1/2}$ van dit element (vergeet de eenheid niet)
g. Bereken het radioactiviteit N_t op $t = 3 \cdot t_{1/2}$
Uit andere experimenten blijkt $N_t = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-0,025 \cdot t}$. De tijd t is in jaren.
- h. Herschrijf deze uitdrukking naar een uitdrukking met grondtal 2
i. Hoe groot is de halfwaardetijd $t_{1/2}$ van dit element (vergeet de eenheid niet)

Maak nu de Möbius-toets “Hoofdstuk 2: machten, wortels en logaritmen”

3 Omwerken van formules

In de onderstaande opgaven en voorbeelden krijg je een fysisch model. Vervolgens moet je daar waarden bij berekenen. Soms van de afhankelijke, soms van de onafhankelijke variabele. Samen met het voorgaande is dit wat we van een HBO-er aan wiskunde vragen:

- stel een model op aan de hand van meetwaarden
- bepaal met behulp van dit model hoe de werkelijkheid zich zal gaan gedragen.

De vragen die over dit onderwerp gesteld kunnen worden zijn:

1. als y bekend is als functie van x . Bereken y dan bij een gegeven waarde van x (invullen en berekenen)
2. als y bekend is als functie van x . Bereken x dan bij een gegeven waarde van y (formulemanipulatie en berekenen)
3. als y bekend is als functie van x . Bereken x dan als functie van y (formulemanipulatie)
4. als y bekend is als functie van x en x is bekend als functie van z . Bereken y dan als functie van z (substitutie)

In het onderstaande voorbeeld worden deze onderdelen uitgewerkt.

Voorbeeld $y = 3 \cdot x^2 - 4$

1. Bepaal y als $x = 2$.

$$y = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8$$

2. Bepaal x als $y = 8$

$$8 = 3 \cdot x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow +4$$

$$12 = 3 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow :3$$

$$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \sqrt{\quad}$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

$$3 \cdot 2^2 - 4 = 8 \quad \text{OK}$$

$$3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 \quad \text{OK}$$

3. Bepaal x als functie van y

$$y = 3 \cdot x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow +4$$

$$y + 4 = 3 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow :3$$

$$x^2 = \frac{y+4}{3} \quad \Leftrightarrow \sqrt{\quad}$$

$$x = \sqrt{\frac{y+4}{3}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{y+4}{3}}$$

$$3 \cdot \left(\sqrt{\frac{y+4}{3}} \right)^2 - 4 = y \quad \text{OK}$$

$$3 \cdot \left(-\sqrt{\frac{y+4}{3}} \right)^2 - 4 = y \quad \text{OK}$$

4. $x = z+1$. Bepaal y als functie van z

$$y = 3 \cdot (z+1)^2 - 4$$

$$y = 3 \cdot (z^2 + 2z + 1) - 4$$

$$y = 3 \cdot z^2 + 6z + 3 - 4$$

$$y = 3 \cdot z^2 + 6z - 1$$

Bij voorbeeld 3 (en in mindere mate bij voorbeeld 2) moet je de formule omkeren. Of zelfs binnenste buiten keren. Dit gebeurt ook bij de onderstaande opgaven. Zo'n probleem kun je opvatten als het pellen van een ui. Elke keer pel je een rok eraf, totdat je x overhoudt. Daarbij kijk je welke parameters, constanten en variabelen het "sterkst aan x vastzitten". Een vermenigvuldiging is daarbij sterker dan een optelling. En haakjes zijn nog sterker.

Voorbeeld: los x op uit $y = \frac{3(2x+1)}{a}$

Je moet nu kiezen tussen:

- $+1$
- $\cdot 2$
- $\cdot 3$
- $/a$

Deze keuze maak je volgens het rijtje als je variabele maar 1 keer in de formule voorkomt:

Hoe	Moeten	Wij	Van	Die	Onvoldoendes	Af
Haakjes	(Macht	Wortel)	(Vermenig- vuldigen	Delen)	(Optellen	Aftrekken)

<--- sterk -----> zwak --->

De haakjes geven de sterkste binding, net als bij atomen in een molecuul. De macht en de wortel zijn even sterk en iets zwakker dan de haakjes. Dan vermenigvuldigen en delen (zijn ook even sterk) en tot slot optellen en aftrekken (ook even sterk).

De zwakste bindingen gaan het eerste los. Normaal is de +1 heel zwak, maar hier staat hij tussen haakjes, waardoor hij stevig aan de x vastzit. de $\cdot 3$ en de $/a$ zitten veel losser aan de x en worden daarom het eerst weggewerkt:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3(2x+1)}{a} && \Leftrightarrow \cdot \frac{a}{3} \\
 \frac{a}{3} \cdot y &= 2x + 1 && \text{nu zit de } +1 \text{ los aan de } x: && \Leftrightarrow -1 \\
 \frac{a}{3} \cdot y - 1 &= 2x && \Leftrightarrow /2 \\
 x &= \frac{\frac{a}{3}y - 1}{2} = \frac{a}{6}y - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

1. Stel dat je d.m.v. een steekproef een schatting wilt maken voor de fractie (of het percentage) mensen die bij de komende verkiezingen PvdA gaat stemmen.

De nauwkeurigheid van je schatting hangt natuurlijk af van de grootte van je steekproef. De relatie tussen de grootte van de steekproef (n) en de nauwkeurigheid van je schatting (a van accuracy) wordt gegeven door de volgende formule:

$$a = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad f \text{ is hier de fractie PvdA stemmers in je steekproef}$$

- Stel dat bij een steekproef van 1000 mensen 300 mensen aangeven PvdA te stemmen. Hoe nauwkeurig is dan deze schatting?
- Met deze formule kun je ook de steekproefgrootte bepalen. Hoe groot moet je de steekproef nemen als je de fractie PvdA kiezers met een nauwkeurigheid van $\pm 0,04$ wilt schatten (neem $f=0,50$)
- Schrijf nu n als functie van a en f . Dus $n = \dots\dots\dots$

(Met deze formule kun je dus bij elke gewenste nauwkeurigheid de grootte van de steekproef bepalen indien je fracties of percentages wilt schatten)

2. Het verband tussen het lichaamsgewicht (M in kg) en skeletgewicht (S in kg) van (land)zoogdieren kan benaderd worden met de formule:

$$S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$$

- Bepaal met de formule het skeletgewicht van een veldmuis van 20 gram (eerst in kg zetten).
- Bepaal met de formule het gewicht van een olifant waarvan het skeletgewicht 1000 kg is.
- Maak een formule waarmee je op grond van het skeletgewicht van een dier het lichaamsgewicht kunt berekenen.
- Hoeveel keer zo groot wordt het skeletgewicht wanneer het lichaamsgewicht 10 maal zo groot wordt (volgens de formule).

3. Hoe verder je verwijderd bent van het aardoppervlak des te lager de luchtdruk en de temperatuur T .

De relatie tussen de luchtdruk p (in N/m^2), de hoogte h (in m) en temperatuur T (in K) wordt door de volgende formule gegeven:

$$p = p_0 \cdot 0,966^{\frac{h}{T}} \quad \text{Met } p_0 \text{ de luchtdruk op zeeniveau (stel } 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2)$$

- Bereken de druk (in N/m^2) op 1 km hoogte als de temperatuur daar 285 Kelvin is.
- Stel dat je in een luchtballon zit met een barometer en een thermometer. Je zou dan met bovenstaande formule de hoogte kunnen berekenen. Herschrijf nu deze formule zo dat je de hoogte als functie van de druk en de temperatuur kunt berekenen

4. De relatie tussen de druk p (in N/m^2), temperatuur T (in Kelvin) en volume V (in m^3) van helium (He) in een luchtballon wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$\left(p + \frac{1,360 \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot 0,03183) = n \cdot 8,3145 \cdot T \quad \text{met } n = \text{hoeveelheid He-gas (in mol)}$$

- Herschrijf de formule zo dat je T als functie van n , p en V krijgt.
- Herschrijf de formule zo dat je p als functie van n , T en V krijgt.

5. Bij roofvissen is het jachtgedrag afhankelijk van de hoeveelheid voedsel, die de vis nog in de maag heeft.

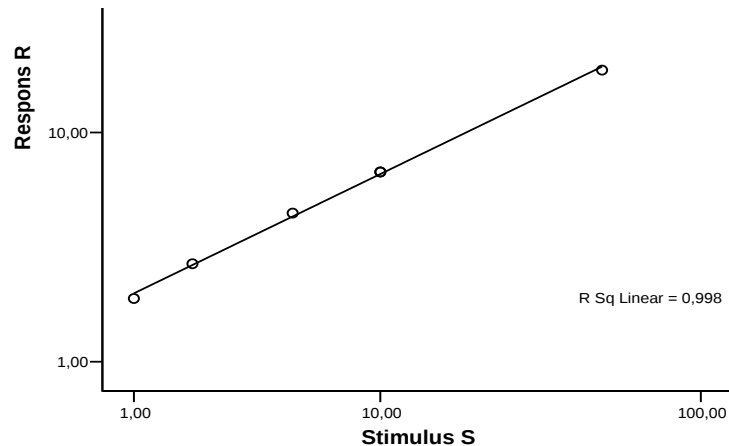
Het verband tussen de fractie van de maag gevuld met voedsel V en de tijd t in uren waarin het voedsel de maag verlaat wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$V = \frac{1}{4}(-0,5 \cdot t + 2)^2 \quad 0 \leq t \leq 4 \quad V(0) = 1 \quad (\text{dit betekent dat op tijdstip 0 de maag vol is})$$

- Welk deel van de maag is nog gevuld met voedsel na een uur?
- Na hoeveel uur is de maaginhoud tot een $\frac{1}{4}$ gedaald?
- Na hoeveel uur is de maag leeg?
- Schrijf nu t als functie van V .

6. Bij een geurproef moet de geursterkte van een oplossing bepaald worden.

Een proefpersoon ruikt aan een standaardoplossing en moet de intensiteit van de geur het getal 10 toekennen. Vervolgens moet hij aangeven welke getalwaarde R (respons) hij toekent aan de geurintensiteit van oplossingen met een andere maar bekende concentratie S (stimulus) van dezelfde stof. De relatie tussen S en R wordt weergegeven door de volgende grafiek.



NB! Op de x-as en de y-as wordt gebruik gemaakt van een logaritmische schaal om de relatie weer te geven.

- Als je bedenkt dat $\log(1)=0$; $\log(10)=1$ en $\log(100)$ is 2, dan wordt de relatie tussen $\log(R)$ en $\log(S)$ gegeven door: $\log(R) = 0,342 + 0,515 \cdot \log(S)$ (=vergelijking van de lijn)
Schrijf nu R als functie van S . (Hoe noemen we dit verband in de wiskunde?)
- Je kunt nu met de formule uit onderdeel a ook a.d.h.v. de respons een schatting maken voor de onbekende stimulus S . Schrijf hiervoor S als functie van R .

7. Het enzym catalase wordt afgebroken onder invloed van zonlicht in aanwezigheid van zuurstof.

Voor de concentratie y (mg/l) van een catalase oplossing wordt de relatie tussen y en de tijd t (min) weergegeven door de volgende grafiek:

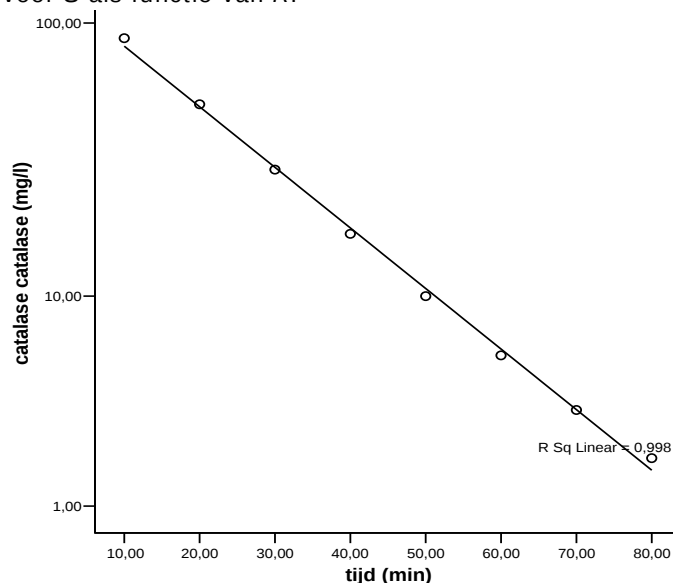
NB! Op de y-as wordt gebruik gemaakt van een logaritmische schaal om de relatie weer te geven.

De relatie tussen $\log(y)$ en t wordt gegeven door:

$$\log(y) = 2,182 - 0,0237 \cdot t$$

(=vergelijking van de lijn; Immers $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(100) = 2$).

- Schrijf nu t als functie van y
- Schrijf nu y als functie van t . (Hoe noemen we dit verband in de wiskunde?)



8. De hoeveelheid massa die per seconde door een ronde buis stroomt ($\dot{m}$ in kg/s) wordt gegeven door:

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot \bar{u} \quad \text{met } \rho = \text{dichtheid vloeistof die door de buis stroomt kg/m}^3 \quad (1)$$

$\bar{u}$ = gemiddelde snelheid m/s; A = dwarsdoorsnede van de buis m²

De hoeveelheid vloeistof die door een ronde buis stroomt $\dot{V}$ (in m³/s) wordt gegeven door:

$$\dot{V} = A \cdot \bar{u} \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (2)$$

- a. Geef een formule waarmee je m.b.v. (1) en (2) ρ als functie van $\dot{m}$ en $\dot{V}$ schrijft.

Voor het oppervlak (A) van een buis geldt:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{m}^2 \quad \text{met } D \text{ de diameter van de buis in m} \quad (3)$$

- b. Combineer formules (2) en (3) om zo de diameter D als functie van ρ , $\dot{V}$ en $\bar{u}$ te schrijven.

Het Reynolds getal (Re) kan volgens de volgende 2 verschillende formules worden berekend:

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\mu\pi D} \quad (4a) \quad \text{of} \quad Re = \frac{\rho\bar{u}D}{\mu} \quad (4b) \quad (4)$$

μ = dynamische viscositeit [Pa.s]

- c. Toon aan dat beide formules voor het Reynolds getal (4a) en (4b) identiek zijn.

Maak nu de Möbius-toets “Hoofdstuk 3: omwerken van formules”

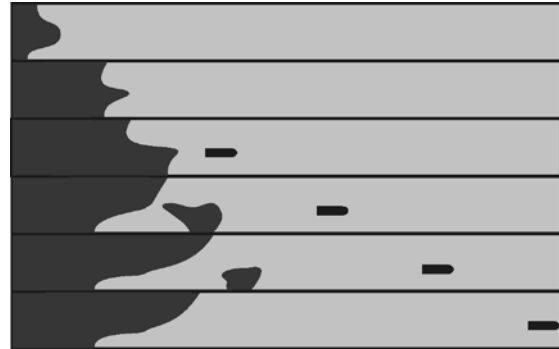
4 Van meetresultaten naar functies

In deze cursus leer je om je metingen – uit de practica die je volgt – om te zetten in een wiskundig model. In jouw geval een functie. Als je havo-wiskunde hebt gevolgd, dan gaat het niet om nieuwe begrippen (rechte lijn, macht, exponent, logaritme), maar wellicht leer je om ze op een nieuwe manier toe te passen.

Voorbeeld

Een kogel met een lengte van 2 cm wordt afgeschoten. Je meet de afgelegde afstand (met behulp van de lengte van de kogel) na elke 0,1 milliseconde (10^{-4} s) met behulp van een stroboscopisch (flitsend) fototoestel. Zet de meetwaarden om in een formule en bereken daaruit de snelheid van de kogel.

foto	tijd (t in s)	afstand (x in m)
2	0,0	0,00
3	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,06
4	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,12
5	$3,0 \cdot 10^{-4}$	0,18
6	$4,0 \cdot 10^{-4}$	0,24

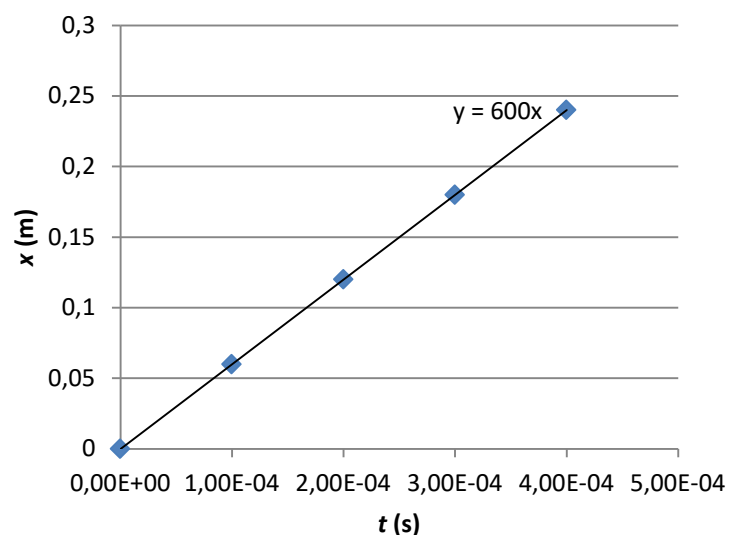


Zet deze waarden om in de de functie, die de plaats van de kogel (x) beschrijft als functie van de tijd (t):

$$x = v \cdot t$$

In de grafiek zie je dat de meetpunten precies op de formule $x = 600 \cdot t$ vallen. Blijkbaar is de snelheid $v = 600$ m/s.

Einde voorbeeld



Opmerking over getallen

In rekenmachines en computerprogramma's (zoals Excel) wordt vaak de notatie $2,00\text{E}-4$ gebruikt. Dit betekent $2,00 \cdot 10^{-4}$. De letter E betekent dus "10 tot de macht".

4.1 Wiskundige modellen

Om precies te zijn, je leert om je meetwaarden om te zetten in een wiskundig model. In deze cursus gebruiken we 3 modellen:

- **lineair model** $y = a \cdot x + b$
- **machtsmodel** $y = b \cdot x^a$
- **exponentieel model** $y = b \cdot e^{a \cdot x}$

In de volgende hoofdstukken leer je om deze modellen te gebruiken en vervolgens om het juiste model bij je meetwaarden te zoeken. Overigens bestaan er nog oneindig veel meer modellen, maar met deze 3 kom je voorlopig een heel eind.

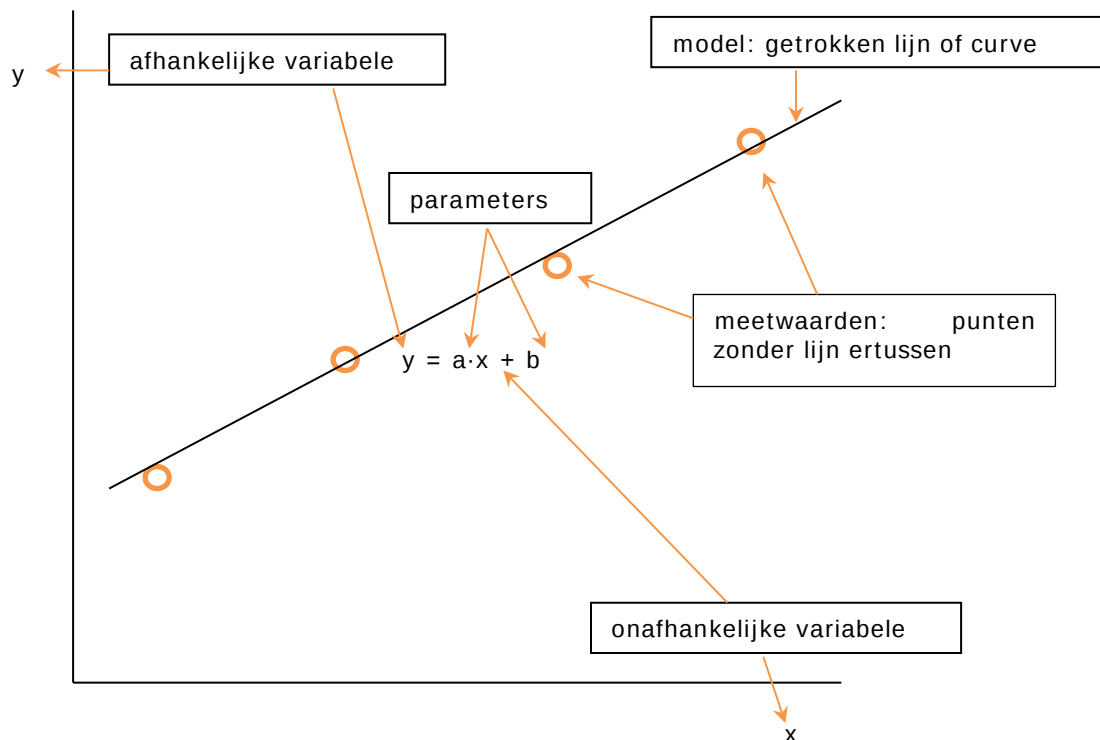
Er zijn 3 gegevens, die in elkaar omgezet moeten worden:

- de **meetwaarden** (zoals de tabel uit de vorige paragraaf, die berekend is uit de foto's, maar ook een grafiek kan uit meetwaarden bestaan)
- het **wiskundige model** (bijvoorbeeld $y = a \cdot x$)
- het **fysische model** (bijvoorbeeld $x = v \cdot t$). Hiern hebben de variabelen en parameters een betekenis.

In elke paragraaf leer je om het fysisch model om te zetten in een wiskundig model en om vervolgens de parameters (a en b) te bepalen uit een grafiek.

Het is belangrijk om te weten dat:

- x is de **onafhankelijke variabele**. Dat wil zeggen dat je x zelf varieert. Bijvoorbeeld de tijd. Je bepaalt immers zelf om de hoeveel seconden je een meting doet. Maar x kan ook een getitreerde hoeveelheid vloeistof zijn. x staat horizontaal in de grafiek.
- y is de **afhankelijke variabele**. De gemeten variabele. Bijvoorbeeld de gemeten afstand of de gemeten concentratie. y staat verticaal in de grafiek.
- x en y zijn **variabelen**. Bij elke meting zijn ze anders. **Parameters** blijven gedurende een experiment gelijk. Bijvoorbeeld de snelheid van de kogel. **Constantes** zijn altijd gelijk. Bijvoorbeeld π en de lichtsnelheid.



5 Het lineaire model $y = a \cdot x + b$

In een lineair model is de berekende (afhankelijke) variabele (y) direct afhankelijk van de gegeven (onafhankelijke) variabele (x). In een grafiek blijkt dit uit een rechte lijn. In het lab zijn ijklijnen – om de concentratie uit een meting te bepalen – lineair.

Algoritme (stappenplan) om een lineair model op te lossen

1. Bepaal welke variabele "iets met y heeft" en welke "iets met x heeft".
2. Zet het fysische model in de goede volgorde van $y = a \cdot x + b$
 - Zet de variabele, die "iets met y heeft te maken" links van de $=$
Er mogen geen parameters in y staan
 - Zet de variabele, die "iets met x heeft te maken" direct rechts van $=$
Je hebt nu een nieuwe formule voor het fysisch model gemaakt.
 - Zet het wiskundige model $y = a \cdot x + b$ direct onder de formule van het fysische model.
3. Lees y , x , a en b af. Dit zijn geen getallen, maar formules waarin de parameters en variabele van het fysisch model staan.
4. Bereken x en y uit de gegeven tabelwaarden
5. Maak de grafiek van $y = a \cdot x + b$
 - Zet y (verticaal) uit tegen x (horizontaal)
 - Trek een rechte lijn door de punten en bepaal de richtingscoëfficiënt (a) en het intercept (b)
6. Bereken de gevraagde parameters uit a en b met behulp van de formule uit 3 en de waarden van a en b uit 5

Voorbeeld $h(t) = f + q^2 \cdot t^2$

Op een aantal tijdstippen t wordt de hoogte h gemeten. De vraag is, hoe groot de parameters f en q zijn.

t	h
0	-3
2	21
3	51
5	147

1. De hoogte h heeft "iets met y " en de tijd t "iets met x ".

$$2. h(t) = q^2 \cdot t^2 + f$$

$$y = a \cdot x + b$$

$$3. y = h \text{ en } x = t^2$$

$$a = q^2 \text{ en } b = f$$

4&5. ----->

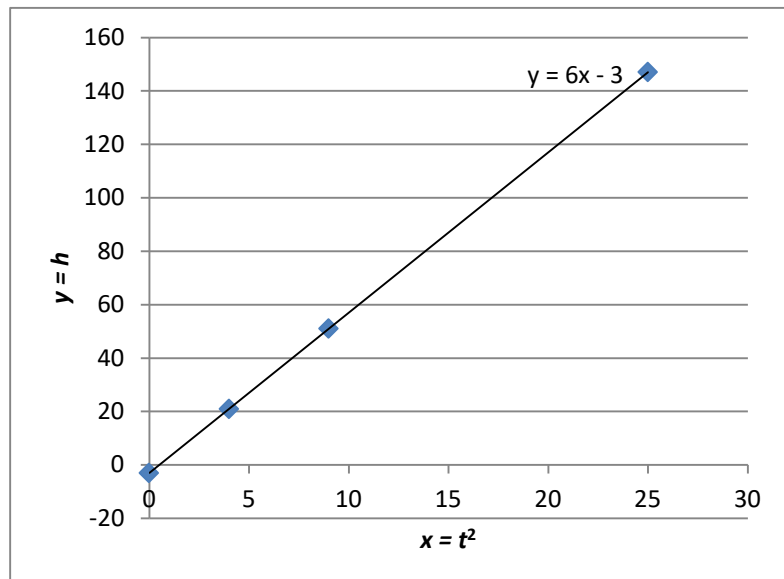
$x = t^2$	$y = h$
0	-3
4	21
9	51
25	147

$$6. a = q^2 = 6$$

$$q = \sqrt{6}$$

$$b = f = -3$$

Einde voorbeeld



5.1 Het grafische lineaire model

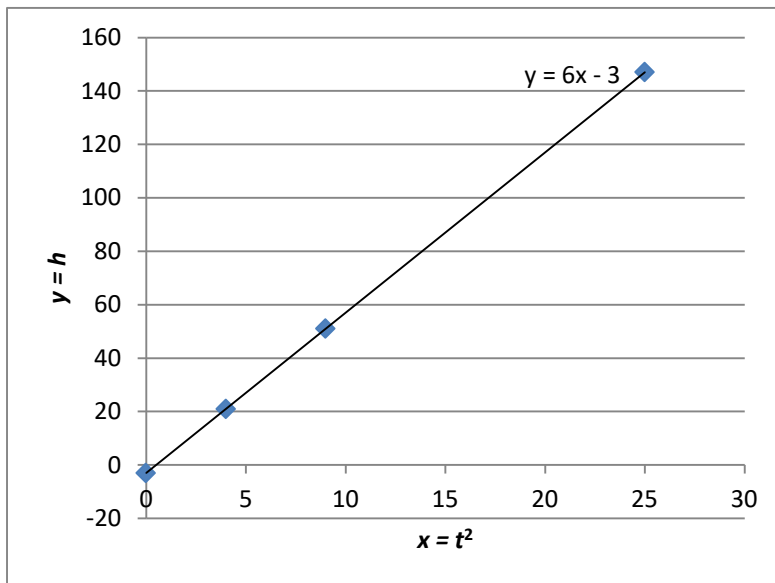
In een lineair model zijn beide assen lineair

In het bovenstaande voorbeeld waren de parameters van het wiskundige model en de tabel met meetwaarden:

- $a = 6$
- $b = -3$

Hierdoor wordt de grafische weergave van het wiskundige model:

$x = t^2$	$y = h$
0	-3
4	21
9	51
25	147



5.2 Opgaven lineaire modellen

1. De snelheid (v in m/s) van een vallend voorwerp wordt gemodelleerd als: $v(t) = v_0 + a \cdot t$

Hierin is a (in m/s²) de versnelling, t de tijd (in s) en v_0 de startsnelheid.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters v_0 en a

t	v
0	10
2	28
5	55
10	100

2. De variabele d wordt berekend uit de variabele h :

$$d^2 = s^2 + (h + 1)f + 1$$

Hierin zijn s en f parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters s en f

h	d
1	2,8
2	2,6
3	2,4
5	2

3. De variabele k wordt berekend uit de variabele z :

$$4k + w = c^2 + 2c\sqrt{z}$$

Hierin zijn c en w parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters c en w

z	k
1	1,5
3	2,0
5	2,1
7	2,4

4. De waarde van z wordt gemeten bij verschillende waarden van r . Bepaal de grootte van de parameters c en d bij: $2z = c + 2^d \cdot r$

r	z
1	2,3
2	3
5	4,3
7	5,5

5. Voor een ijklijn bij spectrometrie geldt:

$$-\log(T) = a \cdot C$$

Opdracht: bepaal de waarde van de parameter a

C	T
0	0,9
1	0,8
5	0,2
7	0,1

6 Werken met logaritmen in grafieken

In hoofdstuk 2 leer je werken met logaritmen. Daar staat ook de definitie van logaritme. Wellicht is het handig om dat hoofdstuk te bestuderen. In dit hoofdstuk leer je, hoe je een logaritmische as kunt maken en aflezen. In de volgende hoofdstukken – het machtsmodel en het exponentiele model – maak je gebruik van logaritmische assen.

6.1 Lineaire schaalverdeling

Bij een lineaire schaalverdeling is de afstand van de oorsprong tot het punt waar a bij staat, **evenredig met a** .

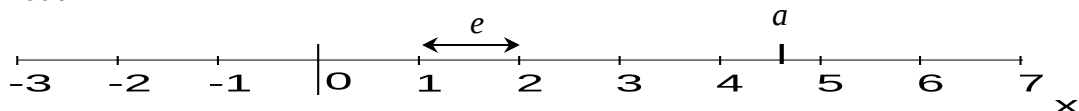


Fig. 5-1 Lineaire schaalverdeling

Is de gekozen lengte-eenheid gelijk aan e cm (e heeft dus niets te maken met $e = 2,72$), dan is de afstand van de oorsprong tot a gelijk aan $a \cdot \text{lengte-eenheid} = a \cdot e$ cm.

Bij de oorsprong staat 0.

6.2 Logaritmische schaalverdelingen

Bij een logaritmische schaalverdeling is e (de eenheid) de afstand tussen 1 en 10. Die afstand wordt een **decade** genoemd. Nu is de afstand van de oorsprong tot het punt waar a bij staat, **evenredig met $\log_{10}(a)$** .

Opmerking: de uitgezette afstand is evenredig met $\log_{10}(a)$, terwijl men bij de streepjes de waarde van a vermeldt).

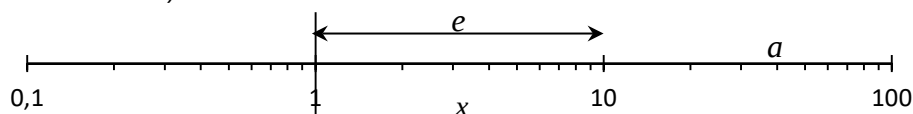


Fig. 5-2

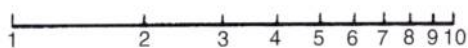


Fig. 5-3 Eén decade van een logaritmische schaal.

Is de gekozen lengte-eenheid gelijk aan e cm, dan is de afstand van de oorsprong tot a gelijk aan $\log(a) \cdot \text{lengte-eenheid} = \log(a) \cdot e$ cm (Fig. 1-2).

Waar komt het getal 10?

$a = 10 \Leftrightarrow$ Op $\log(10) \cdot e$ cm = $1 \cdot e$ cm = e cm van de oorsprong.

Waar komt het getal 2?

$a = 2 \Leftrightarrow$ Op $\log(2) \cdot e$ cm = $0,301 \cdot e$ cm van de oorsprong.

Waar komt het getal 20?

$a = 20 \Leftrightarrow$ Op $\log(20) \cdot e$ cm = $1,301 \cdot e$ cm van de oorsprong.

Waar komt het getal 1?

$a = 1 \Leftrightarrow$ Op $\log(1) \cdot e$ cm = $0 \cdot e$ cm = 0 cm van de oorsprong

$\Rightarrow$ bij de oorsprong staat het getal 1

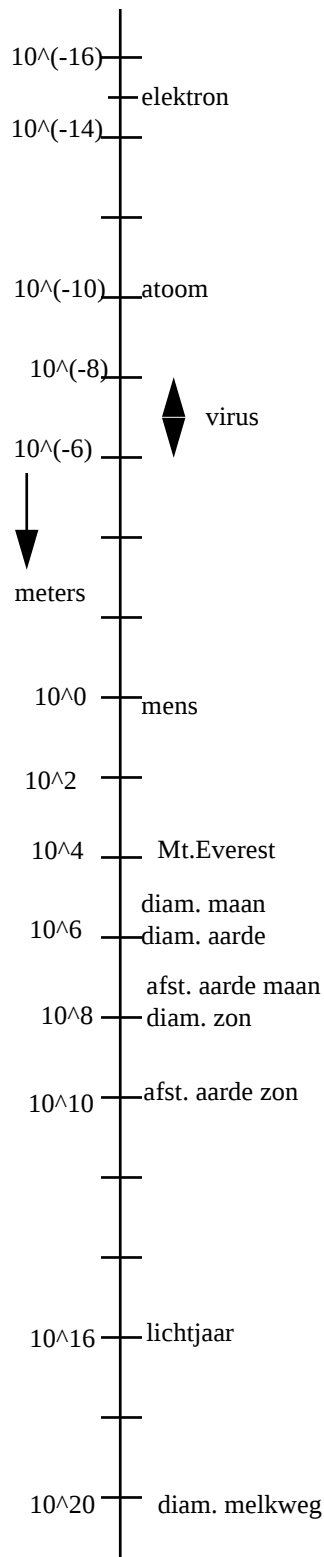
Waar komt het getal 0,1?

$a = 0,1 \Leftrightarrow$ Op $\log(0,1) \cdot e$ cm = $-1 \cdot e$ cm van de oorsprong; d.w.z. e cm links vanaf 1

$\Rightarrow$ er staan geen negatieve getallen op een getallenrechte met logaritmische schaal.

Waar komt het getal 0,2?

$a = 10 \Leftrightarrow$ Op $\log(0,2) \cdot e$ cm = $-0,699 \cdot e$ cm van de oorsprong; d.w.z. $0,699 \cdot e$ cm links van 1.



Bij een logaritmische schaal is het afstandsverschil tussen twee getallen die een factor 10 verschillen, gelijk aan de gekozen eenheid. Immers:

$$\log(30) = \log(3 \cdot 10) = \log(3) + \log(10) = \log(3) + 1$$

$$\log(700) = \log(70 \cdot 10) = \log(70) + \log(10) = \log(70) + 1$$

algemeen:

$$\log(p \cdot 10) = \log(p) + \log(10) = \log(p) + 1$$

Opmerking.: men zegt vaak dat getallen, die een factor 10 verschillen, 1 **decade** verschillen (zie Fig 1-3).

Hierboven wordt gebruik gemaakt van eigenschap (1) van logaritmen. De eigenschappen van logaritmen komen aan de orde in hoofdstuk 2.

Wanneer worden logaritmische schalen gebruikt?

Wel, als een bepaalde grootte vele ordes van grootte varieert (1 orde van grootte is een factor 10), dan kan men de waarden veel overzichtelijker (beter gespreid) op een logaritmische schaal uitzetten.

Als toelichting zie je in Fig.5-4 een logaritmische schaal, met daarop aangegeven verschillende afmetingen uit de wereld om ons heen. Dit bereik kan men op een lineaire schaal niet duidelijk weergeven.

Fig. 5-4

7 Het machtsmodel $y = b \cdot x^a$

Het bekendste machtsmodel is de parabool $y = a \cdot x^2$. Maar de macht hoeft niet altijd 2 te zijn. Een gebroken macht (zoals 0,5) geeft een wortel: $y = a \cdot x^{0,5} = a \cdot \sqrt{x}$. Een negatieve macht betekent 1 gedeeld door: $y = a \cdot x^{-1} = \frac{a}{x}$.

Algoritme (stappenplan) om een machtsmodel op te lossen

1. Bepaal welke variabele "iets met y heeft" en welke "iets met x heeft".
2. Zet het fysische model in de goede volgorde van $y = b \cdot x^a$
 - Zet de variabele, die "iets met y heeft te maken" links van de =
Er mogen geen parameters in y staan
 - Zet de variabele, die "iets met x heeft te maken" direct rechts van =
Zorg er voor dat alle parameters, die met x worden vermenigvuldigd, **voor** de x staan. Je hebt nu een nieuwe formule voor het fysisch model gemaakt.
 - Zet het wiskundige model $y = b \cdot x^a$ direct onder de formule van het fysische model.
3. Lees y , x , a en b af. Lees y , x , a en b af. Dit zijn geen getallen, maar formules waarin de parameters en variabele van het fysisch model staan.
 - Lees y af (staat links van de =)
 - Lees x af. Lees a af (is de macht van x). Lees b af (staat voor de x)
4. Bereken $\log(x)$ en $\log(y)$ uit de gegeven tabelwaarden (een ander grondtal, bijvoorbeeld $\ln()$ in plaats van $\log_{10}()$ mag ook. Dat geeft dezelfde uitkomst)
5. Maak de grafiek van $\log(y) = a \cdot \log(x) + \log(b)$
 - Zet $\log(y)$ (verticaal) uit tegen $\log(x)$ (horizontaal)
 - Trek een rechte lijn door de punten en bepaal de rico (a) en het intercept ($\log(b)$)
6. Bereken de gevraagde parameters uit a en b met behulp van de formule uit 3 en de waarden van a en b uit 5

Voorbeeld $h(t) = 1 + q \cdot t^{\sqrt{k}}$

Op een aantal tijdstippen t wordt de hoogte h gemeten. De vraag is, hoe groot de parameters k en q zijn.

t	h
2	12
3	27
5	75
7	147

1. De hoogte h heeft "iets met y " en de tijd t "iets met x ".

$$2. h(t) - 1 = q \cdot t^{\sqrt{k}}$$

$$y = b \cdot x^a$$

$$3. y = h-1 \text{ en } x = t$$

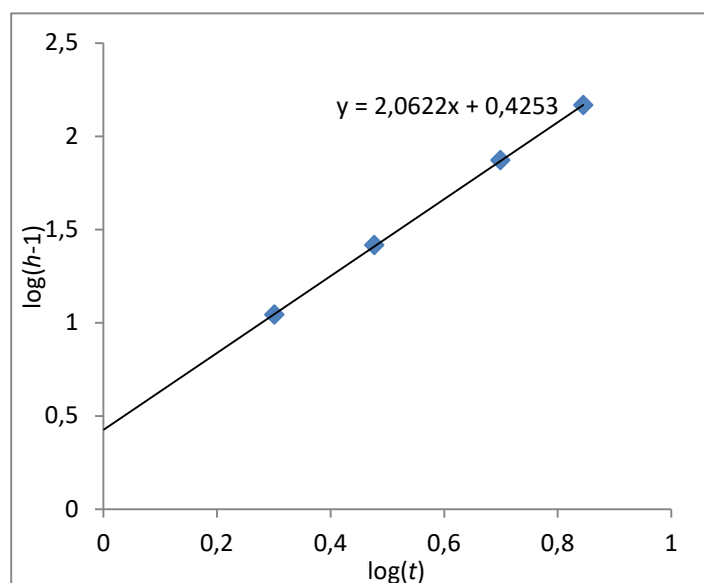
$$a = \sqrt{k} \text{ en } b = q$$

4. $x = t$	$y = h-1$	$\log(x)$	$\log(y)$
2	11	0,3030	1,0414
3	26	0,4771	1,4150
5	74	0,6990	1,8692
7	146	0,8451	2,1644

$$6. a = \sqrt{k} = 2,062. k = 2,062^2 = 4,25$$

$$\log(b) = 0,425. b = 10^{0,425} = 2,66$$

Einde voorbeeld



7.1 Het grafische machtsmodel

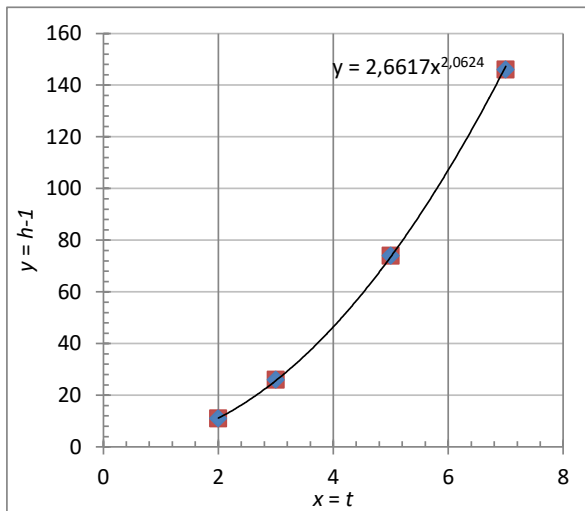
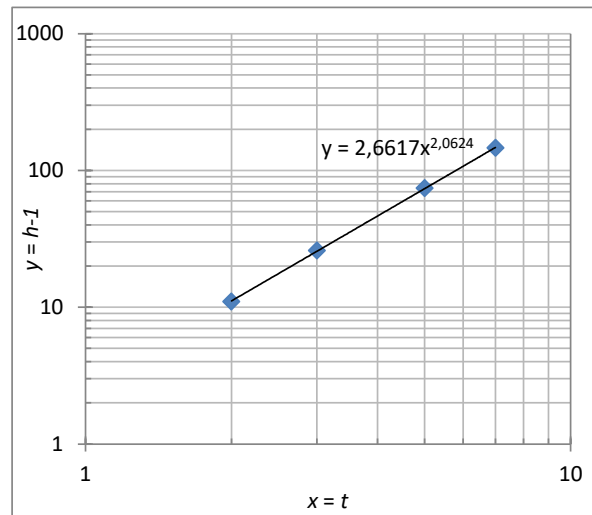
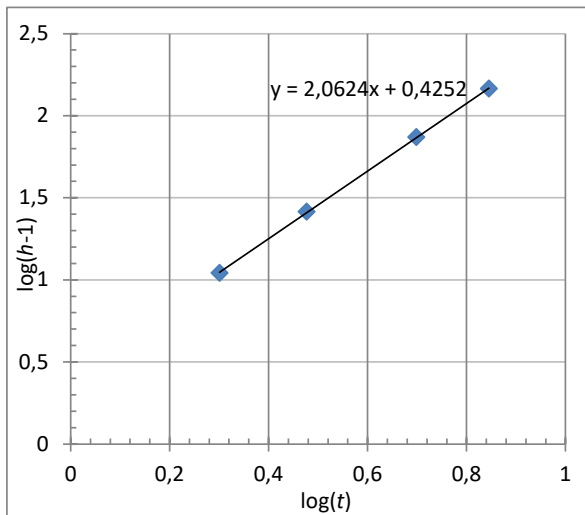
In een machtsmodel zijn beide assen logaritmisch

In het bovenstaande voorbeeld waren de parameters van het wiskundige model en de tabel met meetwaarden:

- $a = 2,06$
- $b = 0,425$

Hierdoor wordt de grafische weergave van het wiskundige model (links met logaritmische x en y en een lineair model, rechts met logaritmische as en een machtsmodel):

$x = t$	$y = h-1$	$\log(x)$	$\log(y)$
2	11	0,3010	1,0414
3	26	0,4771	1,4150
5	74	0,6990	1,8692
7	146	0,8451	2,1644



In de grafiek hier links zijn de assen van het wiskundige model lineair gemaakt. Horizontaal staat dus x (en niet $\log(x)$ of x logaritmisch) en verticaal staat y .

7.2 Opgaven machtsmodellen

1-3 Maak de opgaven in het bestand "OefeningMachtsModellen.xlsx".

1. De kinetiek van een n^e -orde chemische reactie wordt gemodelleerd als: $-r_A = k \cdot C_A^n$

Hierin is $-r_A$ (in $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$) de reactiesnelheid van component A, k de reactiesnelheidsconstante, C_A de concentratie van component A (in mol/m^3) en n de orde van de reactie.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters k en n

C_A	$-r_A$
2	8,9E+04
60	2,2E+08
300	9,0E+09
2000	7,0E+11

2. De variabele z wordt berekend uit de variabele r :

$$\frac{z}{r} = d^2 r^3 \sqrt{g}$$

Hierin zijn d en g parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters d en g

r	z
0,02	35,53
0,8	7,41
3	2,64
15	1,54

3. De variabele q wordt berekend uit de variabele p :

$$3q = 3 \cdot 10^{20} + (u - 1) \cdot (5p - 200)^{(3\sqrt{i}+4)}$$

Hierin zijn u en i parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters u en i

p	q
300	1,01E+20
700	1,29E+20
1200	1,17E+21
3400	3,02E+23

4. De waarde van p wordt gemeten bij verschillende waarden van g :

$$p = g^d - 1$$

Hierin is d de parameter.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameter d

g	p
2	35
3	200
5	3500
7	17000

5. Viscositeitseigenschappen van tomatenketchup

Bij veel vloeistoffen met 'ingewikkelde' molecuul structuren is de viscositeit (= stroperigheid) afhankelijk van de mate waarin de vloeistof in beweging. De viscositeit neemt voor een bepaalde categorie vloeistoffen af bij hogere stroomsnelheden (pseudoplastische vloeistoffen; voorbeelden: diverse sauzen, geconcentreerde glycerol oplossingen, oplossingen van carboxy-methyl-cellulose) en bij andere vloeistoffen neemt de viscositeit juist toe (dilatante vloeistoffen; voorbeelden: maïzena, verf).

De rotatieviscosimeter is een apparaat waarmee deze eigenschappen worden gemeten. De viscositeit η (eenheid Pa.s) wordt bepaald bij verschillende schuifsnelheden D (eenheid: s⁻¹); de schuifsnelheid hangt samen met het toerental van de roerder in de vloeistof.

Het verband tussen viscositeit en schuifsnelheid wordt in de literatuur beschreven met een machtsmodel:

$$\eta = K \cdot D^{n-1}, \quad K \text{ en } n \text{ zijn de parameters van het machtsmodel}$$

Opdracht: bepaal de parameters K en n van het machtsmodel voor tomatenketchup

Schuifsnelheid D (s ⁻¹)	Viscositeit η (Pa.s)
6,7	6,703
9,5	4,965
13,6	3,719
19,5	2,781
27,9	2,068
39,9	1,519
57,2	1,142
81,8	0,868
117,1	0,660
167,6	0,500
240	0,383
343	0,296
492	0,231
704	0,183
1008	0,148

8 Het exponentiële model $y = b \cdot \text{getal}^{ax}$

Dit wordt ook wel het explosieve model genoemd. Bijvoorbeeld voor de voortplanting van bacteriën: 1 -> 2 -> 4 -> 8 -> ... Ook de explosie van springstoffen verloopt zo (1 deeltje steekt 2 aan en die elk ook weer 2, ...). In beide gevallen is het fysisch model $y = b \cdot 2^{at}$. De parameter a kan ook negatief zijn. In dat geval explodeert het systeem niet, maar het sterft uit tot $y = 0$.

Bij wiskunde A van de havo wordt het exponentieel model als volgt gepresenteerd:

$$n = b \cdot g^t$$

In dit hoofdstuk wordt een andere formulering gebruikt:

$$y = b \cdot \text{getal}^{ax}$$

De formulering van het exponentieel model van wiskunde A suggereert een fysisch model: n kan een hoeveelheid zijn en t de tijd. In dit diktaat proberen we juist om fysische modellen om te zetten in wiskundige modellen. De verschillen zijn nu:

- y in plaats van n , omdat alle modellen (lineair, macht en exponentieel) in dit diktaat dezelfde wiskundige vorm hebben
- x in plaats van t om dezelfde reden
- $g = \text{getal}^a$. Wij willen vaak een ander grondtal gebruiken, bijvoorbeeld 10 (decimale reductietijd), 2 (halverings- of verdubbelingstijd) of e (tijdconstante). Dan kunnen we geen vast grondtal g gebruiken, waarvan de waarde ook nog eens van de parameter a afhangt.

Nog belangrijker is, dat een macht geen eenheid mag hebben. De tijd t heeft wel een eenheid. Dat kan problemen geven als je van tijdseenheid verandert.

Bijvoorbeeld $n = 2^t$ met t in seconden. Na 30 seconden is $n = 2^{60} = 1,1 \cdot 10^9$. Als we nu de tijd in minuten uit willen drukken, dan lukt dat erg lastig met deze formule. Immers $n = 2^{0,5} = 1,4$ en dat is iets heel anders. Met de wiskundige formulering is de macht zonder eenheid: $n = 2^{60 \cdot t}$ geeft dezelfde uitkomst met t in minuten. De eenheid van het getal 60 is dan minuut⁻¹.

Algoritme (stappenplan) om een exponentieel model op te lossen

1. Bepaal welke variabele "iets met y heeft" en welke "iets met x heeft".
2. Zet het fysische model in de goede volgorde van $y = b \cdot \text{getal}^{ax}$
 - Zet de variabele, die "iets met y heeft te maken" links van de =
Er mogen geen parameters in y staan
 - Bepaal de waarde van "getal"
 - Bepaal $\log_{\text{getal}}(y) = a \cdot x + \log_{\text{getal}}(b)$
 - Zet de variabele, die "iets met x heeft te maken" direct rechts van =
Zorg er voor dat alle parameters, die met x worden vermenigvuldigd, **voor** de x staan. Je hebt nu een nieuwe formule voor het fysisch model gemaakt.
 - Zet het wiskundige model $\log_{\text{getal}}(y) = a \cdot x + \log_{\text{getal}}(b)$ direct onder de formule van het fysische model.
3. Lees y , x , a en b af. Lees y , x , a en b af. Dit zijn geen getallen, maar formules waarin de parameters en variabele van het fysisch model staan.
 - Lees $\log_{\text{getal}}(y)$ af (staat links van de =) en bepaal daaruit y
 - Lees x af. Lees a af (staat voor de x)
 - Lees $\log_{\text{getal}}(b)$ af (staat rechts van de x)
4. Bereken x en $\log_{\text{getal}}(y)$ uit de gegeven tabelwaarden
5. Maak de grafiek van $\log_{\text{getal}}(y) = a \cdot x + \log_{\text{getal}}(b)$
 - Zet $\log_{\text{getal}}(y)$ (verticaal) uit tegen x (horizontaal)
 - Trek een rechte lijn door de punten en bepaal de rico (a) en het intercept ($\log_{\text{getal}}(b)$)
6. Bereken de gevraagde parameters uit a en b met behulp van de formule uit 3 en de waarden van a en b uit 5

Voorbeeld $c \cdot h = 2^{3 \cdot t}$

Op een aantal tijdstippen t wordt de hoogte h gemeten. De vraag is, hoe groot de parameter c is.

1. De hoogte h heeft "iets met y " en de tijd t "iets met x ".

2. $h = \frac{1}{c} \cdot 2^{3t}$ met getal = 2.

$$\log_2(h) = 3 \cdot t + \log_2\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$\log_2(y) = a \cdot x + \log_2(b)$$

3. $y = h$ en $x = t$

$$b = \frac{1}{c} \text{ en } a = 3.$$

4.

t	$\log_2(h)$
1	0,678
2	3,7
5	12,7
7	18,7

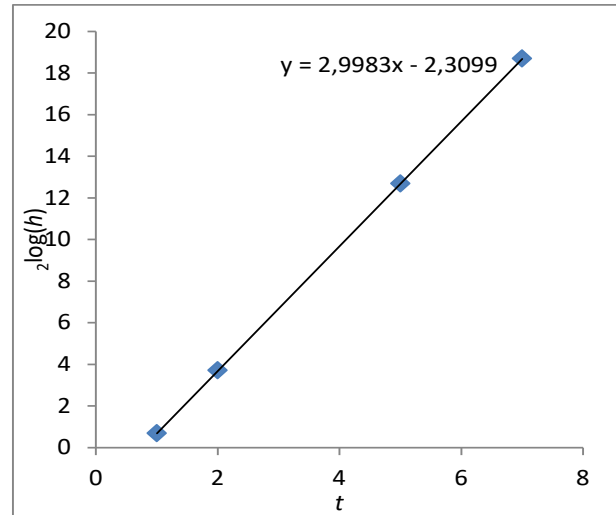
6. $a = 2,998 = 3$.

$$\log_2(1/c) = -2,3099. \quad 1/c = 2^{-2,3099} = 0,2.$$

$$c = 1/0,2 = 5$$

Einde voorbeeld

t	h
1	1,6
2	13
5	6554
7	419430



8.1 Het grafische exponentiële model

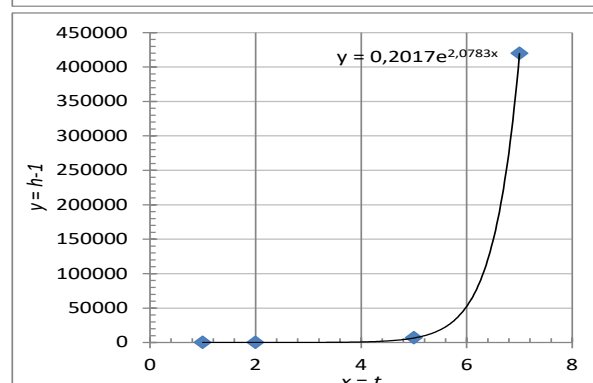
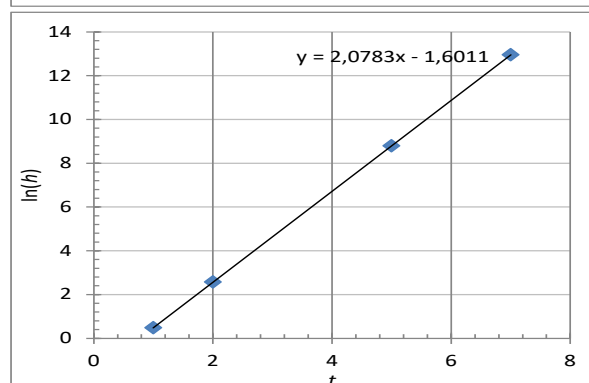
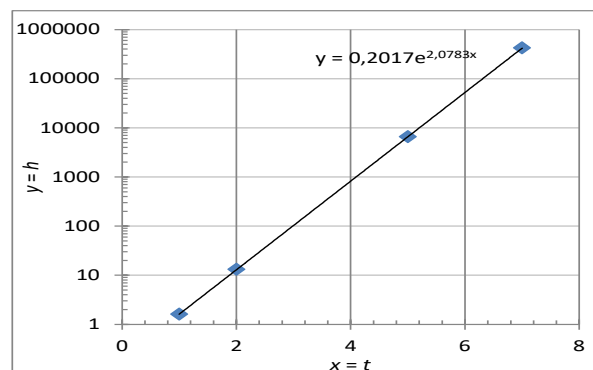
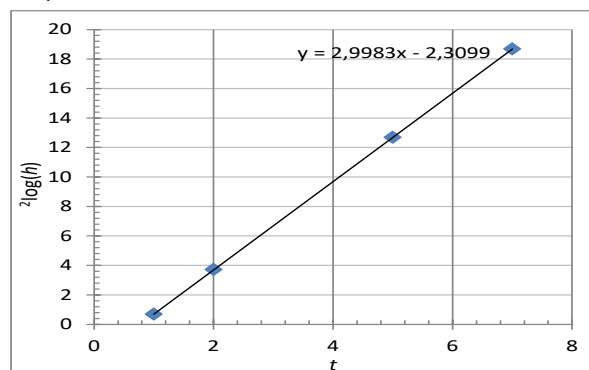
In een exponentieel model is de x-as lineair en de y-as logaritmisch

In het bovenstaande voorbeeld waren de parameters van het wiskundige model en de tabel met meetwaarden:

- $a = 2,998$
- $b = 2,31$

Hierdoor wordt de grafische weergave van het wiskundige model (links met logaritmische x en y en een lineair model, rechts met logaritmische as en een machtsmodel):

t	h	$\log_2(h)$	$\ln(h)$
1	1,6	0,68	0,47
2	13	3,70	2,56
5	6554	12,7	8,79
7	419430	18,7	12,95



Linksboven staat $\log_2(h)$ tegen t en linksonder $\ln(h)$ tegen t . Beide y-assen hebben een logaritme. De gelineariseerde modellen worden:

- linksboven: $\log_2(h) = 3 \cdot t + \log_2(1/c)$. De richtingscoëfficiënt $a = 3$ (2,998 afronden) en $\log_2(1/c) = -2,31$ zodat $1/c = 2^{-2,31} = 0,2$ en $c = 5$.
- linksonder: $h = \frac{1}{c} \cdot 2^{3t} = \frac{1}{c} \cdot e^{\ln(2^{3t})} = \frac{1}{c} \cdot e^{3t \cdot \ln(2)} = \frac{1}{c} \cdot e^{3t \cdot 0,693} = \frac{1}{c} \cdot e^{2,079t}$ zodat:
 $\ln(h) = 2,079 \cdot t + \ln(1/c)$. De richtingscoëfficiënt is 2,079. Dus $a \cdot \ln(2) = 2,079$ en $a = 2,079/\ln(2) = 3$. Het intercept $\ln(1/c) = -1,6011$ zodat $1/c = e^{-1,6011} = 0,2$ en $c = 5$.

In de grafiek rechtsonder zijn de assen van het wiskundige model lineair gemaakt. Verticaal staat dus x (en niet $\log_2(y)$ of y logaritmisch).

Voorbeeld exponentiele groei

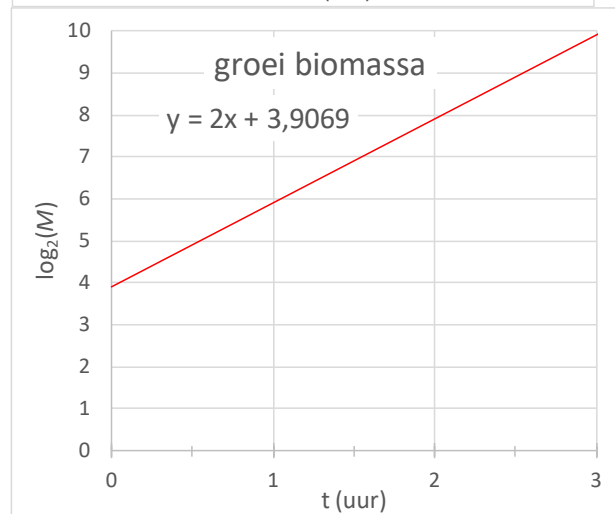
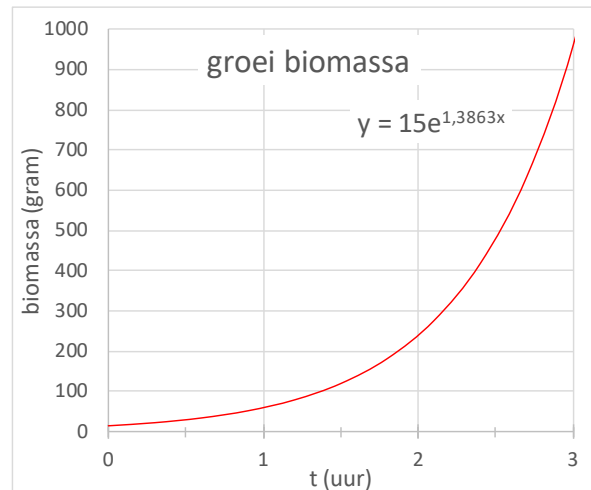
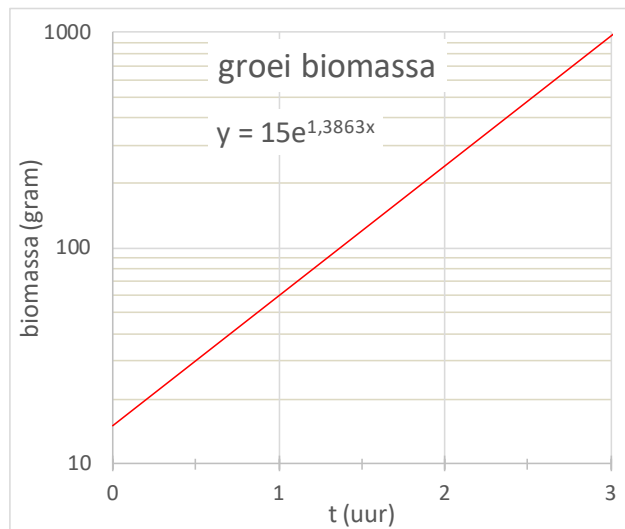
Onder perfecte omstandigheden verdubbelt een gistcel zich elk half uur. Dus als je start met 15 gram gist, dan heb je na een half uur 30 gram, na een uur 60 gram en na anderhalf uur 120 gram (wel regelmatig suiker toevoegen). Die groei is te beschrijven met:

$$M = 15 \cdot 2^{\frac{t}{0,5}}$$

Met M in gram en t in uur. De 0,5 uur in de macht is de verdubbelingstijd. Grafisch ziet dat er uit als in de grafiek hiernaast.

Als je uit deze grafiek de parameters $M_0 = 15$ gram en $t_2 = 0,5$ uur wilt bepalen, dan kan dat op drie manieren:

1. Maak een grafiek met $\log_2(M)$ tegen t . De helling is dan $\frac{1}{t_2} = 2$. Het intercept is $\log_2(M_0) = 3,9$ zodat $M_0 = 2^{3,9} = 15$.



2. Het kan ook zijn, dat de grafiek gegeven is met een logaritmische y-as, zoals hiernaast. In dat geval maak je van de rechter verticale as een lineaire as met $\log(M)$ (waarden 1, 2 en 3).

De helling bepaal je nu met die nieuwe lineaire as. Nooit de helling bepalen met een logaritmische as! De helling is 0,60. Het probleem is, dat die helling niet meer $1/t_2$ is, want de vergelijking van de lijn met deze logaritmische as is:

$$M = 15 \cdot 10^{\frac{t}{t_D}}$$

waarin t_D de vertienvoudigingstijd is. Waarom staat er nu opeens een grondtal 10? Dat komt door de y-as. Die heeft immers grondtal 10. Elke decade is een factor 10 groter.

In de vorige cursus heb je geleerd hoe je een grondtal om moet zetten:

$$M = 15 \cdot 10^{\frac{t}{t_D}} = 15 \cdot (2^{\log_2(10)})^{\frac{t}{t_D}} = 15 \cdot (2^{3,32})^{\frac{t}{t_D}} = 15 \cdot 2^{3,32 \cdot \frac{t}{t_D}} = 15 \cdot 2^{\frac{t}{t_2}}$$

Dus $1/t_2 = 3,32 \cdot 1/t_D = 3,32 \cdot 0,60 = 2,0$.

Het goede nieuws is, dat je M_0 direkt kunt aflezen van de logaritmische as. Tussen de 10 en het streepje daarboven (20) ligt 15.

3. Tot slot kan het zijn, dat je de vergelijking van de trendlijn krijgt:

$$y = 15 \cdot e^{1,3863 \cdot x}$$

Dit is een vergelijkbaar probleem als hierboven: je moet het grondtal veranderen:

$$M = 15 \cdot e^{1,3863 \cdot t} = 15 \cdot (2^{\log_2(e)})^{1,3863 \cdot t} = 15 \cdot (2^{1,44})^{1,3863 \cdot t} = 15 \cdot 2^{2,0 \cdot t}$$

Je ziet dat $t_2 = 1/2 = 0,5$. De waarde van M_0 bepaal je wel snel met deze formule: $M_0 = 15$ gram.

Einde voorbeeld

8.2 Opgaven exponentiële modellen

1. De reactiesnelheidsconstante k (in s^{-1}) van een chemische reactie wordt gemodelleerd als:

$$k = A \cdot e^{\frac{-E_A}{R \cdot T}}$$

Hierin is A (in s^{-1}) de Arrheniusfactor, T de temperatuur (in K), E_A de activeringsenergie van component A (in J/mol) en R de gasconstante (8,3 J/mol·K). Opdracht: bepaal de waarde van de parameters E_A en A

T	k
300	2,0E+08
400	2,4E+08
500	2,8E+08
700	3,2E+08

2. De variabele z wordt berekend uit de variabele r : $\frac{2}{z \cdot g^2} = 10^{5d^2 \sqrt{r}}$

Hierin zijn d en g parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters d en g

r	z
0,1	0,0247
0,3	0,022
0,4	0,0211
0,45	0,0207

3. De variabele q wordt berekend uit de variabele p : $3q = (u - 1) \cdot 2^{(3\sqrt{i}+4)(5p-3)}$

Hierin zijn u en i parameters.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameters u en i

p	q
-0,2	5,30E-06
-0,1	2,84E-05
0,1	4,46E-04
0,2	2,39E-03

4. De waarde van z wordt gemeten bij verschillende waarden van g :

$$z + 1 = 3^{\sqrt{dg}}$$

Hierin is d de parameter.

Opdracht: bepaal de waarde van de parameter d

g	z
0	0
2	7
3	14
3,2	15

5. Afdoden van sporen

Sporen kunnen worden gedood door ze te verhitten. Behalve de temperatuur speelt ook de tijd een rol.

In de tabel staat het aantal levensvatbare sporen weergegeven van de bacterie *Bacillus subtilis* wanneer deze verhit wordt bij 110°C.

Opdracht: Bepaal een exponentieel model voor het aantal levensvatbare sporen N .

Tijd t (min)	Aantal levensvatbare sporen N
0,00	$2,40 \cdot 10^9$
0,50	$1,08 \cdot 10^9$
1,00	$4,80 \cdot 10^8$
1,50	$2,20 \cdot 10^8$
2,00	$9,85 \cdot 10^7$
3,00	$2,01 \cdot 10^7$
4,00	$4,41 \cdot 10^6$
6,00	$1,62 \cdot 10^5$
8,00	$6,88 \cdot 10^3$

6. Enzymactiviteit

Door veroudering neemt de activiteit van enzymen. In de tabel vind je de activiteit van een enzymen in de loop van de tijd. De activiteit is het aantal μmol dat het enzymen per tijdseenheid en volume van de reactor kan omzetten.

Opdracht: Bepaal een exponentieel model voor de enzymactiviteit $A(t)$.

Tijd t (min)	activiteit A ($\mu\text{mol} \cdot \text{ml}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$)
0	0,86
3	0,79
6	0,70
9	0,65
15	0,58
20	0,46
25	0,41

9 Het kiezen van het juiste model

Je hebt nu 3 modellen gehad:

- lineair model $y = a \cdot x + b$
- machtsmodel $y = b \cdot x^a$
- exponentieel model $y = b \cdot \text{getal}^{a \cdot x}$

Een vierde optie is: geen van deze modellen.

Bij het kiezen van het juiste model kun je 3 benaderingen kiezen:

1. zoek bij het fysisch model een wiskundig model, dat er zo veel mogelijk op lijkt. Volg daarvoor de eerste 2 stappen van het algoritme, dat bij elk model beschreven staat.

Dit is de handigste methode als je een formule hebt van het fysische model.

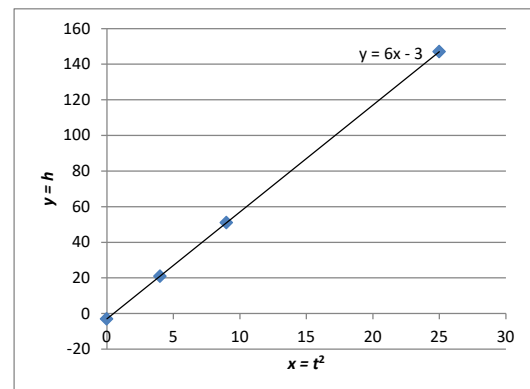
2. zet de meetwaarden in verschillende grafieken en kijk welke een rechte lijn geeft:

- beide assen lineair: een lineair model
- beide assen logaritmisch: een machtsmodel
- de x-as lineair en de y-as logaritmisch: een exponentieel model
- geen van deze grafieken geeft een rechte lijn: geen van deze modellen.

Dit is de handigste methode als je geen fysisch model hebt, maar alleen meetwaarden.

3. zet de meetwaarden in verschillende grafieken en kijk welke een rechte lijn geeft (methode heeft wel last van meetruis):

- y tegen x : een lineair model
- $\frac{\Delta y}{y}$ tegen $\frac{\Delta x}{x}$: een machtsmodel
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tegen y : een exponentieel model

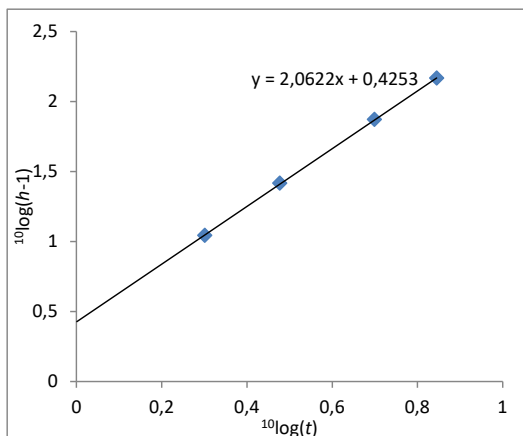


9.1 Samenvatting 3 modellen

Lineair model

$$y = a \cdot x + b$$

De x-as is lineair en de y-as is lineair.



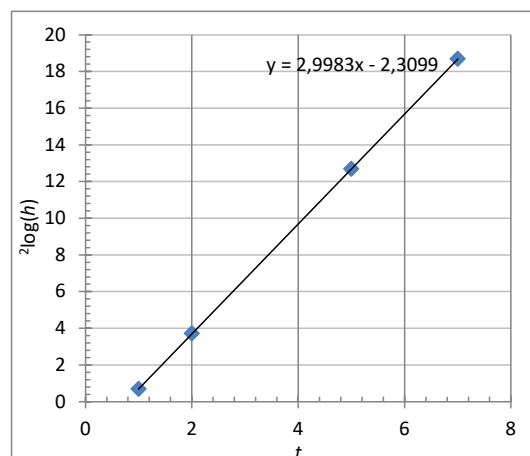
Machtsmodel

$$y = b \cdot x^a \text{ zodat } \log(y) = a \cdot \log(x) + \log(b)$$

Je mag ook $\ln()$ gebruiken in plaats van $\log()$

De x-as is logaritmisch en de y-as is logaritmisch.

$\frac{\Delta y}{y} \leftrightarrow \frac{\Delta x}{x}$ uitgezet in grafiek is rechte voor een machtsfunctie (nadeel: gevoelig voor meeton nauwkeu- righeden).



Exponentieel model

$$y = b \cdot \text{getal}^{a \cdot x} \text{ zodat}$$

$$\log_{\text{getal}}(y) = a \cdot x + \log_{\text{getal}}(b) \text{ of}$$

$$\log_{10}(y) = a \cdot \log_{10}(\text{getal}) \cdot x + \log_{10}(b) \text{ of}$$

$$\ln(y) = a \cdot \ln(\text{getal}) \cdot x + \ln(b)$$

De x-as is lineair en de y-as is logaritmisch.

9.2 Opgaven modelkeuze

Algemeen geldt

Om de parameters van een model te bepalen proberen we langs de horizontale en de verticale as zodanige 'variabelen' te kiezen dat de grafiek een **rechte** oplevert.

M.b.v. lineaire regressie kunnen we dan op basis van **alle meetpunten** de parameters bepalen.

9.2.1 Transmissie en extinctie

Oplossingen zijn in staat om licht te absorberen. Het percentage licht dat *doorgelaten* wordt is een maat voor de concentratie. Dit percentage wordt de *transmissie* T genoemd. De extinctie E wordt daaruit berekend door de log te nemen van de transmissie:

$$E = -\log(T)$$

Bij deze berekening van E wordt T uitgedrukt in een fractie (0 – 1) en niet in %.

A: light source; B: monochromator (prism or diffraction grid); C: aperture; D: cuvet with sample;

F: photosensor; G: amplifier with calibrated reading showing the EXTINCTION .

I_0 : light intensity in front of the sample

I : light intensity behind the sample

The measured value EXTINCTION gives the relation of the light intensity that has passed (I) and the original light intensity (I_0).

Depending on the apparatus and the tuning the measured values are given either in percent or logarithmically.

$$E = \log \frac{I_0}{I} = \log \frac{1}{T} = -\log T, \text{ waarbij de transmissie } T = \frac{I}{I_0} = \text{fractie doorgelaten licht.}$$

Van een experiment is in de onderstaande tabel de transmissie gegeven bij verschillende concentraties van de oplossing in het cuvet:

conc. ($\mu\text{mol/L}$)	Transmissie (fractie)
1,00	0,64
2,00	0,37
3,00	0,25
4,00	0,14
5,00	0,10

In de chemie gebruik je deze gegevens om een onbekende concentratie te bepalen door de transmissie te bepalen en de concentratie uit de grafiek af te lezen (ijkgrafiek).

1. Maak een grafiek van de gemeten waarden: T (verticaal) als functie van de concentratie C (horizontaal).

- Lees uit de grafiek de transmissie af bij $C = 2,5 \mu\text{mol/L}$
- Lees uit de grafiek de concentratie af bij $T = 0,2$

Je ziet dat het aflezen van deze waarden lastig gaat. We gaan een andere grafiek tekenen bij de volgende opdracht.

2. Maak nu een derde kolom met de waarden van $-\log(T)$.

- Maak vervolgens een grafiek van $-\log(T)$ als functie van de concentratie C . Trek een rechte lijn door de punten.
- Lees nu weer de waarde van T af bij $C = 2,5 \mu\text{mol/L}$ en de waarde van C bij $T = 0,2$.

Bij de eerste opdracht was het lastig om het punt in de grafiek te vinden, nu zie je dat het lastig is om de waarde van T af te lezen. Met het bepalen van een regressievergelijking kun je de formule van het model vastleggen, waarmee je de waarden volgens dat model kunt berekenen.

3. Regressiemodel

- Bepaal de vergelijking van de beste lijn (regressielijn) die uit de metingen volgt (bepaal de waarde van de rico en het intercept).
- Wat gebeurt er met de $-\log(T)$ als de concentratie verdubbelt?
- Wat gebeurt er met de transmissie T als de concentratie verdubbelt, wordt deze dan ook twee keer zo klein of niet? Waarom wel/niet?

4. Zonnebrandolie moet het zonlicht absorberen.

- a. Wordt er ook twee keer zoveel zonlicht geabsorbeerd als je de laag twee keer zo dik maakt? Waarom wel/niet?

Lambert-Beer

Volgens de theorie van Lambert-Beer wordt de intensiteit van het doorgelaten licht beschreven door de vergelijking: $I = I_0 \cdot e^{-\varepsilon \cdot C \cdot l}$ zodat $T = \frac{I}{I_0} = e^{-\varepsilon \cdot C \cdot l}$ (1)

Hierbij is:

C = concentratie van de opgeloste stof

l = lengte van het cuvet (de vloeistoflengte waar de straal doorheen gaat)

ε = de extinctiecoëfficiënt

I_0 = de intensiteit van de opvallende lichtstraal

I = de intensiteit van het doorgelaten licht.

5. Modelleren

- a. Komt het verband tussen T en C in de vergelijking van Lambert-Beer overeen met een lineair, een machts- of een exponentieel model? Verklaar je antwoord.

Bij opdracht 3 heb je de beste lijn (regressielijn) door de meetpunten bepaald: $\log(T) = \dots$ We gaan de rechte nu schrijven als een exponentiële functie.

- Geef $-\ln(T)$ als functie van de concentratie C
- Geef $-\log(T)$ als functie van de concentratie C
- De lengte van het cuvet is $l = 0,8$ cm. Bereken de extinctiecoëfficiënt ε . Wat is de eenheid?
- Geef de vergelijking van T als functie van de concentratie C met het grondtal 10.
- Geef de vergelijking van T als functie van de concentratie C met het grondtal 2.
- Bereken de transmissie T bij een concentratie van $3,5 \mu\text{mol/L}$ en een cuvetlengte van $1,2$ cm

9.2.2 Opwarmen vat met water.

Een bekerglas met water van 10°C wordt opgewarmd met behulp van een dompelaar. De temperatuur van het water in het vat wordt bijgehouden. In de onderstaande tabel zie je het resultaat.

Tijd t (min)	Temp. T ($^\circ\text{C}$)
0,00	10,0
1,00	37,0
2,00	58,9
3,00	68,0
4,00	74,5
5,00	77,1
6,00	79,8
8,00	81,1
10,00	81,7
60	82,0

Uit bovenstaande tabel blijkt dat de uiteindelijke evenwichtstemperatuur 82°C wordt. Dat is de temperatuur waarbij de warmtetoevoer in evenwicht is met het warmteverlies naar de omgeving.

6. Modelleren

- $dT = 82 - T$ is het verschil tussen de huidige en de evenwichtstemperatuur. Voeg aan de tabel een kolom toe met dT . Ga na of het temperatuurverschil dT exponentieel verloopt.
- Bepaal de vergelijking van de regressielijn (de beste lijn).
- Bepaal een model voor het verloop van de temperatuur T als functie van de tijd t .

9.2.3 Tweede orde chemisch reactie

Bij de reactie $2A \rightarrow B$ wordt tijdens de reactie de concentratie van A gemeten. De resultaten staan in de tabel. Uit de theorie van tweede orde reacties is bekend dat het verband tussen de reciproke waarde van de concentratie ($= 1/C$) tegen de tijd een rechte lijn geeft.

7. Modelleren

- Stel met behulp van de bovenstaande tekst een lineair model op, dat het verband tussen C en t weergeeft.

Bij een reactorexperiment wordt de concentratie van A op verschillende tijdstippen gemeten:

Tijd (min)	conc. c_A (mol/L)
0,00	1,475
1,00	0,995
2,00	0,855
3,00	0,689
4,00	0,635
5,00	0,535
6,00	0,465
7,00	0,425
8,00	0,389
9,00	0,365
10,00	0,325

8. Grafische verwerking

- Zet de resultaten van deze tabel uit in een geschikte grafiek.
- Bepaal de parameters van een lineaire regressievergelijking.
- Stel een vergelijking op voor de concentratie C_A als functie van de tijd t.
- Maak (in Maple of Excel) een grafiek van de meetpunten en de regressielijn samen (de regressielijn moet als lijn worden weergegeven en de meetpunten als punten).

9.2.4 n^e orde reactie

De reactiesnelheidsvergelijking van een n^e orde reactie wordt gegeven door:

$$-r = k \cdot C^n$$

Hierin is r de reactiesnelheid (in mol/L/s), C de concentratie van het reactant (in mol/L), n de orde van de reactie (geen eenheid) en k de reactiesnelheidsconstante (eenheid is afhankelijk van de waarde van n).

Bij een reactorexperiment zijn waarden opgenomen van de bovenstaande variabelen:

t	C	r
0,0	0,860	-2,714
0,1	0,660	-1,624
0,3	0,464	-0,591
0,5	0,365	-0,340
1,0	0,245	-0,166
1,5	0,189	-0,083
2,0	0,156	-0,059
2,5	0,134	-0,034
5,0	0,081	-0,011
7,5	0,060	-0,007
10,0	0,048	-0,004

9 bepaal de waarde van de parameters k en n

10 Uitwerkingen en antwoorden

10.1 Antwoorden hoofdstuk 1

1.
 - a. $x = 16$
 - b. $x = -13$
 - c. $x = 3$
 - d. $x = -8$
 - e. $x = 9$
 - f. $x = -17$
 - g. $x = 1$
 - h. $x = -19$
2.
 - a. $x = -2$
 - b. $x = -9$
 - c. $x = -3$
 - d. $x = -3$
 - e. $x = \frac{3}{2}$
 - f. $x = 7$
 - g. $x = \frac{7}{2}$
 - h. $x = \frac{1}{3}$
 - i. $x = -\frac{5}{6}$
 - j. $x = -\frac{4}{3}$
3.
 - a. $x = -4$
 - b. $x = -13$
 - c. $x = 3$
 - d. $x = -\frac{9}{7}$
 - e. $x = \frac{3}{4}$
 - f. $x = -14$
 - g. $x = \frac{19}{2}$
 - h. $x = \frac{13}{5}$
 - i. $x = \frac{5}{11}$
 - j. $x = \frac{3}{2}$
4.
 - a. $2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$
 - b. $14 \cdot p + 21 \cdot q + 35 \cdot r$
 - c. $6 \cdot p - 96 \cdot q - 12$
 - d. $9 \cdot b \cdot c - 12 \cdot b \cdot d - 6 \cdot b \cdot p$
 - e. $18 \cdot a \cdot b \cdot k + 9 \cdot a \cdot c \cdot k - 9 \cdot a \cdot k$
 - f. $-10 \cdot x + 5 \cdot y + 5 \cdot z$
 - g. $56 \cdot a - 32 \cdot b + 24 \cdot c$
 - h. $a \cdot b - a \cdot c + 8 \cdot a$
 - i. $-3 \cdot r + 2 \cdot r \cdot t$
 - j. $a \cdot (x - y) + b \cdot (x - y) = a \cdot x - a \cdot y + b \cdot x - b \cdot y$
5.
 - a. $-144 \cdot a + 24 \cdot b + 2b = -144 \cdot a + 26 \cdot b$
 - b. $-12 \cdot a \cdot b - 48 \cdot a + 12 \cdot a \cdot b - 48 \cdot b = -48 \cdot a - 48 \cdot b$
 - c. $6 \cdot a - 4 \cdot a + 3 + 2 \cdot a = 4 \cdot a + 3$
 - d. $7 \cdot a - 3 \cdot b + 2 \cdot a = 9 \cdot a - 3 \cdot b$
 - e. $2 - 3 \cdot a - 2 \cdot b + a = 2 - 2 \cdot a - 2 \cdot b$
 - f. $a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
6.
 - a. $7 \cdot a \cdot (2 \cdot b + c)$
 - b. $-2 \cdot q \cdot (p + 10 \cdot r)$
 - c. $3 \cdot a \cdot (b + 3 \cdot c + 4 \cdot d)$
 - d. $2 \cdot (-m - 1 + 2 \cdot n)$ of $-2 \cdot (m + 1 - 2 \cdot n)$
 - e. $a \cdot s \cdot (k \cdot l - t \cdot p)$
 - f. $b \cdot (q + p)$
 - g. $k \cdot (30 + c)$
 - h. $t \cdot (1 - y)$
 - i. $3 \cdot p$
 - j. $9 \cdot r \cdot (-6 \cdot p \cdot q + 5)$
7.
 - a. $\frac{1}{2}$
 - b. $\frac{1}{3}$
 - c. $\frac{4}{5}$
8.
 - a. $\frac{3}{9}$ en $\frac{1}{9}$
 - b. $\frac{2}{8}$ en $\frac{1}{8}$
 - c. $\frac{3}{24}$ en $\frac{1}{24}$
 - d. $\frac{10}{20}$ en $\frac{5}{20}$ en $\frac{4}{20}$
9.
 - a. $\frac{3}{24} + \frac{18}{24} + \frac{10}{24} + \frac{20}{24} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8}$
 - b. $\frac{5}{15} - \frac{-12}{15} = \frac{5 - (-12)}{15} = \frac{17}{15}$
 - c. $\frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28}$

10. a. $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ b. $\frac{3}{-10}$ c. $\frac{-14}{27}$
11. a. $\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{15}$ b. $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{4} = \frac{35}{36}$ c. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$
12. a. $\frac{3a}{1} \cdot \frac{7b}{7b} = \frac{3a}{1} = 3a$ b. $\frac{2a(1+2b)}{2b} = \frac{a(1+2b)}{b}$ of $\frac{a+2ab}{b}$
 c. $\frac{12 \cdot 5a}{12(2b-a)} = \frac{5a}{2b-a}$
13. a. $\frac{b}{ab}$ en $\frac{a}{ab}$ c. $\frac{y}{6xy}$ en $\frac{2x}{6xy}$
 b. $\frac{2}{4c}$ en $\frac{1}{4c}$ d. $\frac{3}{12xy}$ en $\frac{1}{12xy}$
14. a. $\frac{3ax}{2xy} - \frac{3by}{2xy} = \frac{3ax - 3by}{2xy}$
 b. $\frac{12p}{10q} - \frac{30}{10q} = \frac{12p-30}{10q} = \frac{6p-15}{5q}$
 c. $\frac{6bcd}{abcd} - \frac{3acd}{abcd} - \frac{4abd}{abcd} + \frac{5abc}{abcd} = \frac{6bcd - 3acd - 4abd + 5abc}{abcd}$
15. a. $\frac{2}{2a+4} + \frac{6}{2a+4} = \frac{8}{2a+4}$ beter: $\frac{4}{a+2}$
 b. $\frac{-2}{2a-2b} + \frac{5}{2a-2b} = \frac{3}{2a-2b}$
 c. $\frac{3}{a-b} + \frac{-5-c}{a-b} = \frac{-2-c}{a-b}$
 d. $\frac{4-2d}{2ab+2c} - \frac{3-d}{2ab+2c} = \frac{4-2d-(3-d)}{2ab+2c} = \frac{1-d}{2ab+2c}$
 e. $\frac{ap}{3ap-3cp} + \frac{-3}{3ap-3cp} = \frac{ap-3}{3ap-3cp}$
 f. $\frac{e}{a-b} + \frac{a-b}{a-b} = \frac{e+a-b}{a-b}$
16. a. $\frac{ad}{bc}$ b. $\frac{abc}{rst}$ c. $\frac{3p}{5q} + \frac{6}{5q} = \frac{3p+6}{5q}$
17. a. $\frac{a}{2b} \cdot \frac{d}{3c} = \frac{ad}{6bc}$ b. $\frac{pq}{6} \cdot \frac{r}{3a} = \frac{pqr}{18a}$ c. $\frac{16ad}{9bc}$
18. a. $\frac{\frac{a}{2} + \frac{2}{2}}{\frac{2}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a+2}{2}}{\frac{2-a}{2}} = \frac{a+2}{2} \cdot \frac{2}{2-a} = \frac{a+2}{2-a}$ dit kan niet verder!
 b. $\left(\frac{3(a-b)}{2x}\right) \cdot \left(\frac{x}{a-b}\right) = \frac{3}{2}$
 c. $\frac{6(3a+4b)}{12p(3a+4b)} = \frac{6}{12p} = \frac{1}{2p}$
 d. $\frac{3}{q+ab} = \frac{3aq}{q+ab}$
19. a. $x = \frac{1}{4}$ c. $x = \frac{1}{8}$
 b. $x = -2$ d. $x = -\frac{2}{21}$
20. a. $x = -\frac{28}{5}$ c. $x = 3$
 b. $x = -3$ d. De vergelijking is waar voor geen enkele x

21. a. $x = -\frac{4}{5}$ d. geen enkele opl.
 b. $x = 8$ e. geen enkele opl. want $x = 1$ voldoet niet
 c. $x = \frac{1}{4}$ f. $x = \frac{3}{22}$
22. a. $x = -\frac{b}{a}$ e. $x = 2q$
 b. $x = \frac{10}{p+q}$ f. $x = \frac{a}{2a-3}$
 c. $x = \frac{a}{1-2b}$ g. $x = \frac{pq-c}{aq+b}$
 d. $x = \frac{a+2b}{3} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ h. $x = \frac{ap+bq}{aq+bp}$

10.2 Antwoorden hoofdstuk 2

1. a. $x = \sqrt{81} = 9$ e. $x = \sqrt{83} \approx 9,11$
 b. $x-5 = \sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow x = 7$ f. $x = 5 + \sqrt[3]{28} \approx 8,04$
 c. $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$ g. $x = \sqrt[3]{28} = 28^{\frac{1}{3}} \approx 3,04$
 d. $x^5 = 243 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}} = 3$ h. $x = \sqrt[5]{230} = 230^{\frac{1}{5}} \approx 2,97$
2. a. $2^{x+x+1} = 2^{2x+1}$ e. $(2^{x+1})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{x+1}{2}}$
 b. $2^{2(x+1)} = 2^{2x+2}$ f. $2 \cdot x^{\frac{-1}{2}}$
 c. $9 \cdot x^2$ g. $2^x \cdot (2^2)^{x+1} = 2^x \cdot 2^{2x+2} = 2^{x+2x+2} = 2^{3x+2}$
 d. $8 \cdot x^{-3}$ h. $x + 2\sqrt{x} + 1$
3. a. $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
 b. $7,53 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$
 c. $30 \cdot 10^9 = 3,0 \cdot 10^{10}$
 d. $105 \cdot 10^{12} = 1,05 \cdot 10^{14}$
 e. $169,5 \cdot 10^{-11} = 1,7 \cdot 10^{-9}$ (2 significante cijfers)
4. a. 0,403
 b. 2,00
 c. $\log_3(1,5) = \frac{\log(1,5)}{\log(3)} = \frac{0,176}{0,477} = 0,369$
 d. $\log_8(15,3) = \frac{\log(15,3)}{\log(8)} = \frac{1,185}{0,903} = 1,31$
5. a. $x = 3$ e. $x = 3$
 b. $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ f. $x = 1$
 c. $x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ g. $x = 1$
 d. $x = -6$ h. $x = -6$
6. a. $x = 2^3 = 8$ e. $x = 1000$
 b. $x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ f. $x = 2500$
 c. $x = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$ ($3x-6=2^5=32 \Leftrightarrow 3x=38$) g. $x = \frac{99999}{4} = 24999\frac{3}{4}$
 d. $x = -64$ h. $x = -1000000 = -1,00 \cdot 10^6$
7. a. $2^6 = (10^{\log(2)})^6 = 10^{6 \cdot \log(2)} = 10^{6 \cdot 0,301} = 10^{1,806}$ zie formule (0*)
 b. $e^x = (10^{\log(e)})^x = 10^{x \cdot \log(e)} = 10^{0,434 \cdot x}$ gebruik $e = 10^{\log(e)}$ bij 1^e stap
 c. $10^4 = (e^{\ln(10)})^4 = e^{4 \cdot \ln(10)} = e^{9,210}$ gebruik $10 = e^{\ln(10)}$
 d. $10^x = (e^{\ln(10)})^x = e^{x \cdot \ln(10)} = e^{2,303 \cdot x}$

8. a. $\log_g(g^p) = p \cdot \log_g(g) = p \cdot 1 = p$ want $\log_g(g) = 1$
 b. $\log_a(\sqrt{a}) = \log_a(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \log_a(a) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
 c. $\log\left(\frac{1}{100}\right) = \log(10^{-2}) = -2 \cdot \log(10) = -2 \cdot 1 = -2$
 d. $\log_3\left(\frac{\sqrt{27} \cdot 9}{81}\right) = \log_3\left(\frac{\sqrt{3^3} \cdot 3^2}{3^4}\right) = \log_3\left(\frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^2}{3^4}\right) = \log_3\left(\frac{3^{\frac{3}{2}+2}}{3^4}\right) = \log_3\left(\frac{3^{\frac{7}{2}}}{3^4}\right) = \log_3\left(3^{\frac{7}{2}-4}\right) = \log_3\left(3^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$
 e. $\ln(e^{0.7}) = 0.7 \cdot \ln(e) = 0.7 \cdot 1 = 0.7$
 f. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = (-2) \cdot \ln(e) = -2$
 g. $\ln(e^x) = x \cdot \ln(e) = x$
9. a. $\log_4(x) - \log_4(2) = 3 \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4^3 \Leftrightarrow x = 128$
 b. $\log_4\left(\frac{x^2}{2x}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 8$
10. a. $2^1 \cdot N_0 = 2N_0$
 b. $2^2 \cdot N_0 = 4N_0$
 c. $2^3 \cdot N_0 = 8N_0$
 d. Als de tijd t weer td minuten verder is, dan verdubbelt het aantal micro-organismen.
 e en f. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{td}}$
 $N_t = 75 \cdot 2^{0.026 \cdot t}$
 e. $N_0 = 75$
 f. $\frac{t}{td} = 0.026t \Leftrightarrow \frac{1}{td} = 0.026 \Leftrightarrow td = \frac{1}{0.026} = 38 \text{ minuten}$
 g. $2^3 \cdot N_0 = 8 \cdot 75 = 600$
 h. $N_t = 130 \cdot 10^{0.018 \cdot t} = 130 \cdot 2^{\log_2(10^{0.018 \cdot t})} = 130 \cdot 2^{0.018 \cdot t \cdot \log_2(10)} =$
 $130 \cdot 2^{0.018 \cdot t \cdot \frac{\log(10)}{\log(2)}} = 130 \cdot 2^{0.018 \cdot t \cdot \frac{1}{0.30}} = 130 \cdot 2^{0.06 \cdot t}$
 i. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{td}}$
 $N_t = 130 \cdot 2^{0.06 \cdot t}$
 $\frac{t}{td} = 0.06t \Leftrightarrow \frac{1}{td} = 0.06 \Leftrightarrow td = \frac{1}{0.06} = 17 \text{ minuten}$
 i. en j. hadden ook in 1 keer berekend kunnen worden:
 i. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{td}}$
 $N_t = 130 \cdot 10^{0.018 \cdot t}$
 $2^{\frac{t}{td}} = 10^{0.018 \cdot t} \Leftrightarrow \log_2\left(2^{\frac{t}{td}}\right) = \log_2(10^{0.018 \cdot t}) = \frac{t}{td} = 0.018 \cdot t \cdot \log_2(10) = 0.06t$
 $\frac{1}{td} = 0.06 \Leftrightarrow td = \frac{1}{0.06} = 17 \text{ minuten}$
 j. $N_t = 130 \cdot 2^4 = 2080$.
 Je kunt natuurlijk ook $t = 4 \cdot td$ invullen in $N_t = 130 \cdot 10^{0.018 \cdot t} =$
 $N_t = 130 \cdot 10^{0.018 \cdot 4 \cdot 17}$. Dat is veel meer werk. Denk er wel aan, dat die 17 minuten afgerond zijn. Gebruik de niet-afgeronde waarde, die in je rekenmachine staat
 $130 \cdot 10^{0.018 \cdot 4 \cdot 17} = 2177$ in plaats van 2080

11. a. $10^{-1} \cdot N_0 = 0,1 \cdot N_0$
 b. $10^{-2} \cdot N_0 = 0,01 \cdot N_0$
 c. $10^{-3} \cdot N_0 = 0,001 \cdot N_0$
 d. Als de tijd t weer D minuten verder is, dan is het aantal micro-organismen weer 10 keer zo klein.

e en f.
$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot 10^{\frac{-t}{D}} \\ N_t &= 450 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,62 \cdot t} \end{aligned}$$

e. $N_0 = 450 \cdot 10^3$

f. $\frac{-t}{D} = -0,62 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{D} = 0,62 \Leftrightarrow D = \frac{1}{0,62} = 1,6 \text{ minuten}$

g. $10^{-3} \cdot N_0 = 10^{-3} \cdot 450 \cdot 10^3 = 450$

h.
$$\begin{aligned} N_t &= 140 \cdot 10^3 \cdot 2^{-0,28 \cdot t} = 140 \cdot 10^3 \cdot 10^{\log(2^{-0,28 \cdot t})} = \\ 140 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,28 \cdot t \cdot \log(2)} &= 140 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,28 \cdot t \cdot 0,30} = 140 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,084 \cdot t} \end{aligned}$$

i.
$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot 10^{\frac{-t}{D}} \\ N_t &= 450 \cdot 10^3 \cdot 10^{-0,084 \cdot t} \end{aligned}$$

$\frac{-t}{D} = -0,084 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{D} = 0,084 \Leftrightarrow D = \frac{1}{0,084} = 12 \text{ minuten (als je het niet-afgeronde getal uit opgave h gebruikt)}$

i. en j. hadden ook in 1 keer berekend kunnen worden:

i.
$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot 10^{\frac{-t}{D}} \\ N_t &= 450 \cdot 10^3 \cdot 2^{-0,28 \cdot t} \end{aligned}$$

$10^{\frac{-t}{D}} = 2^{-0,28 \cdot t} \Leftrightarrow \log(10^{\frac{-t}{D}}) = \log(2^{-0,28 \cdot t}) \Leftrightarrow \frac{-t}{D} = -0,28 \cdot t \cdot \log(2) = -0,084 \cdot t$

$\frac{1}{D} = 0,084 \Leftrightarrow D = \frac{1}{0,084} = 12 \text{ minuten}$

j. $N_t = 450 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = 45.$

12. a. $e^{-1} \cdot T_0 = 0,37 \cdot T_0$
 b. $e^{-2} \cdot T_0 = 0,14 \cdot T_0$
 c. $e^{-3} \cdot T_0 = 0,05 \cdot T_0$
 d. Als de tijd t weer τ minuten verder is, dan is de temperatuur weer 2,71 keer zo klein.

e en f.
$$\begin{aligned} T_t &= T_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \\ T_t &= 27 \cdot e^{-0,06 \cdot t} \end{aligned}$$

e. $T_0 = 27^\circ\text{C}$

f. $\frac{-t}{\tau} = -0,06 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} = 0,06 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{0,06} = 17 \text{ uur}$

g. $e^{-3} \cdot 27 = 0,05 \cdot 27 = 1,3^\circ\text{C}$

h.
$$\begin{aligned} T_t &= 50 \cdot 10^{-0,05 \cdot t} = 50 \cdot e^{\ln(10^{-0,05 \cdot t})} = \\ 50 \cdot e^{-0,05 \cdot t \cdot \ln(10)} &= 50 \cdot e^{-0,05 \cdot t \cdot 2,3} = 50 \cdot e^{-0,12 \cdot t} \end{aligned}$$

i.
$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \\ N_t &= 50 \cdot e^{-0,12 \cdot t} \end{aligned}$$

$\frac{-t}{\tau} = -0,12 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} = 0,12 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{0,12} = 8,7 \text{ minuten (als je het niet-afgeronde getal uit opgave h gebruikt)}$

i. en j. hadden ook in 1 keer berekend kunnen worden:

i.
$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \\ N_t &= 50 \cdot 10^{-0,05 \cdot t} \end{aligned}$$

$e^{\frac{-t}{\tau}} = 10^{-0,05 \cdot t} \Leftrightarrow \ln(e^{\frac{-t}{\tau}}) = \ln(10^{-0,05 \cdot t}) \Leftrightarrow \frac{-t}{\tau} = -0,05 \cdot t \cdot \ln(10) = -0,12 \cdot t$

$\frac{1}{\tau} = 0,12 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{0,12} = 8,7 \text{ minuten}$

j. $T_t = 50 \cdot e^{-2} = 6,8^\circ\text{C}$

13. a. $0,5 \cdot N_0$
 b. $0,25 \cdot N_0$
 c. $0,125 \cdot N_0$
 d. Als de tijd t weer $t_{1/2}$ tijdseenheden verder is, dan is de radioactiviteit weer 2 keer zo klein.
- e en f. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{t_{1/2}}}$
 $N_t = 8,3 \cdot 10^6 \cdot 2^{-0,031 \cdot t}$
 e. $N_0 = 8,3 \cdot 10^6$
 f. $\frac{t}{t_{1/2}} = 0,031 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{t_{1/2}} = 0,031 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{1}{0,031} = 32 \text{ jaar}$
 g. $2^{-3} \cdot N_0 = 0,125 \cdot 8,3 \cdot 10^6 = 1,0 \cdot 10^6$
 h. $N_t = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-0,025 \cdot t} = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{\log_2(10^{-0,025 \cdot t})} =$
 $5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{-0,025 \cdot t \cdot \log_2(10)} = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{-0,025 \cdot t \cdot \frac{\log(10)}{\log(2)}} =$
 $5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{-0,025 \cdot t \cdot \frac{1}{0,30}} = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{-0,083 \cdot t}$
- i. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{t_{1/2}}}$
 $N_t = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 2^{-0,083 \cdot t}$
 $\frac{-t}{t_{1/2}} = -0,083 \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{t_{1/2}} = 0,083 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{1}{0,083} = 12 \text{ jaar}$
- i. en j. hadden ook in 1 keer berekend kunnen worden:
- i. $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{t_{1/2}}}$
 $N_t = 5,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-0,025 \cdot t}$
 $2^{\frac{-t}{t_{1/2}}} = 10^{-0,025 \cdot t} \Leftrightarrow \log_2\left(2^{\frac{-t}{t_{1/2}}}\right) = \log_2(10^{-0,025 \cdot t}) \Leftrightarrow$
 $\frac{-t}{t_{1/2}} = -0,025 \cdot t \cdot \log_2(10) = -0,083 \cdot t$
 $\frac{1}{t_{1/2}} = 0,083 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{1}{0,083} = 12 \text{ jaar}$

10.1 Antwoorden hoofdstuk 3

- 1a. $a = 1,96 \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{1000}} = 0,028$
- b. $0,04 = 1,96 \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{n}}$ zodat $n = 600,25$ dus een steekproef van 601 kiezers
- c. $n = \frac{1,96^2 \cdot f \cdot (1-f)}{a^2} = \frac{3,84 \cdot f \cdot (1-f)}{a^2}$
- 2a. $S = 0,0343 \cdot 0,020^{1,083} = 0,000495 \text{ kg} = 0,5 \text{ gram}$
- b. $M = 13 \cdot 10^3 \text{ kg}$
- c. $M = \left(\frac{S}{0,0343}\right)^{\frac{1}{1,083}} = \sqrt[1,083]{\frac{S}{0,0343}} = 22,5 \cdot S^{0,923}$
- d. $S_{\text{nieuw}} = 0,0343 \cdot M_{\text{nieuw}}^{1,083} = 0,0343 \cdot (10 \cdot M_{\text{oud}})^{1,083} = 0,0343 \cdot 10^{1,083} \cdot M^{1,083} = S_{\text{oud}} \cdot 10^{1,083}$
 $10^{1,083} = 12 \text{ keer zo groot}$
- 3a. $89743,87 \text{ N/m}^2 = 0,90 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
- b. $h = -66,6 \cdot T \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = 66,6 \cdot T \cdot \log\left(\frac{p_0}{p}\right)$
- 4a. $T = \frac{\left(p + \frac{1,360 \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot 0,03183)}{n \cdot 8,3145}$

$$b. \quad p = \frac{n \cdot 8,3145 \cdot T}{V - n \cdot 0,03183} - \frac{1,360 \cdot n^2}{V^2}$$

$$5a. \quad 0,56 \quad (56\%)$$

$$b. \quad 2 \text{ uur}$$

$$c. \quad 4 \text{ uur}$$

$$d. \quad t = 4 \cdot (1 - \sqrt{V})$$

$$6a. \quad R = 2,198 \cdot S^{0,515} \quad \text{Dit is een machtsfunctie}$$

$$b. \quad \left(\frac{R}{2,198}\right)^{\frac{1}{0,515}} = {}^{0,515}\sqrt{\frac{R}{2,198}} = 0,217 \cdot R^{1,94}$$

$$7a. \quad t = \frac{2,182 - \log(y)}{0,0237}$$

$$b. \quad y = 152 \cdot 10^{-0,237 \cdot t} = 152 \cdot 0,947^t \quad \text{Dit is een exponentiële functie.}$$

$$8a. \quad \rho = \frac{\dot{m}}{\dot{V}}$$

$$b. \quad D = \sqrt{\frac{4\dot{V}}{\pi u}} = 2\sqrt{\frac{\dot{V}}{\pi u}}$$

$$c. \quad \dot{m} = \rho \cdot A \cdot u = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot u \Leftrightarrow u = \frac{4\dot{m}}{\rho \cdot \pi \cdot D^2}$$

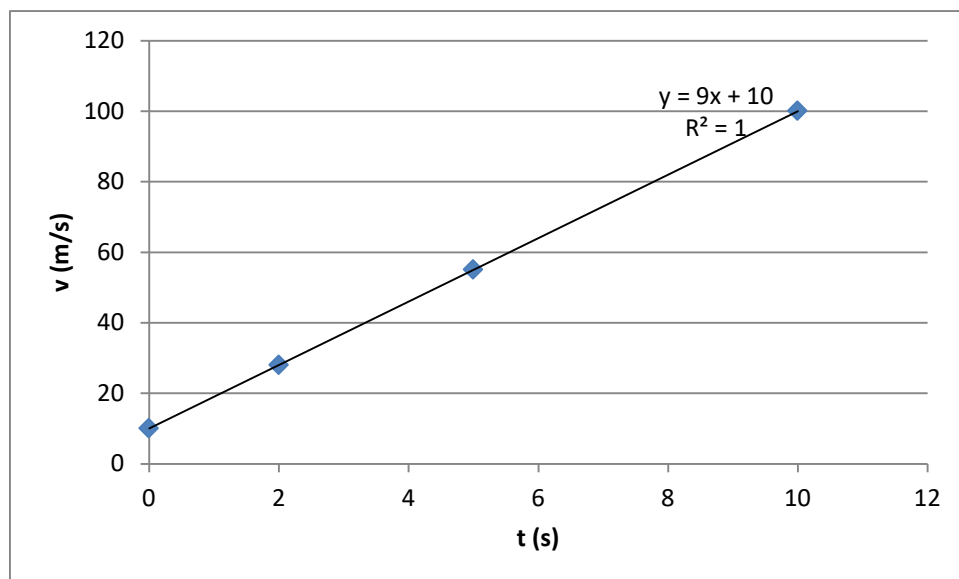
$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{\rho \cdot 4\dot{m} \cdot D}{\rho \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi \cdot D \cdot \mu}$$

10.2 Antwoorden hoofdstuk 5

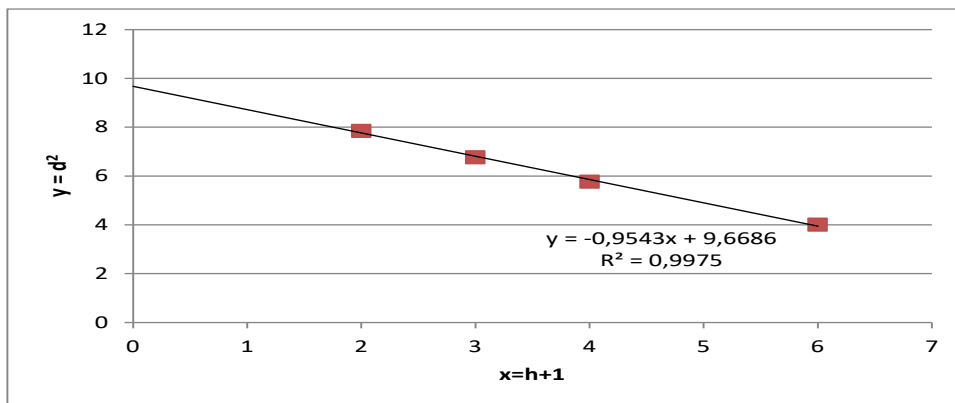
De uitwerkingen van deze opgaven staan in het bestand "UitwerkingenH5LineaireModellen.xlsx". Dit is een Excel-bestand, maar je hoeft geen verstand van Excel te hebben om het bestand te gebruiken:

- klik onderin op het tabblad van de opgave, die je wilt nakijken
- klik elke keer op een + in de linker kantlijn om de uitwerking van een deelvraag zichtbaar te maken.

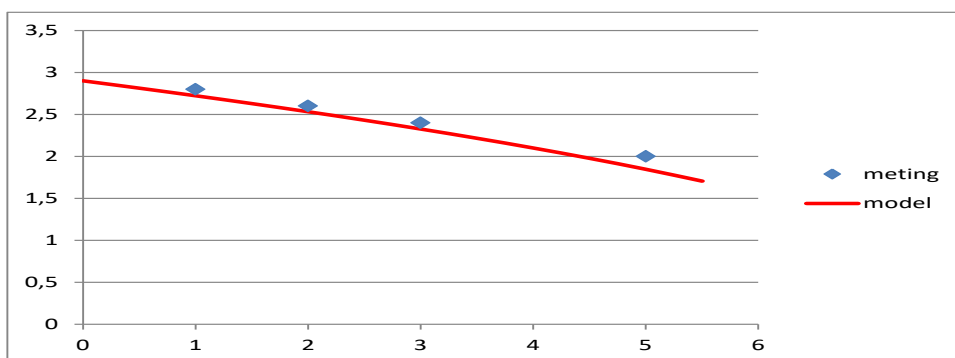
$$1. \quad a = 9 \text{ m/s}^2 \text{ en } v_0 = 10 \text{ m/s}$$



2. de bovenste grafiek is het gelineariseerde model ($y = d^2$ tegen $x = h+1$) en de onderste grafiek is die van het fysische model (d tegen h)



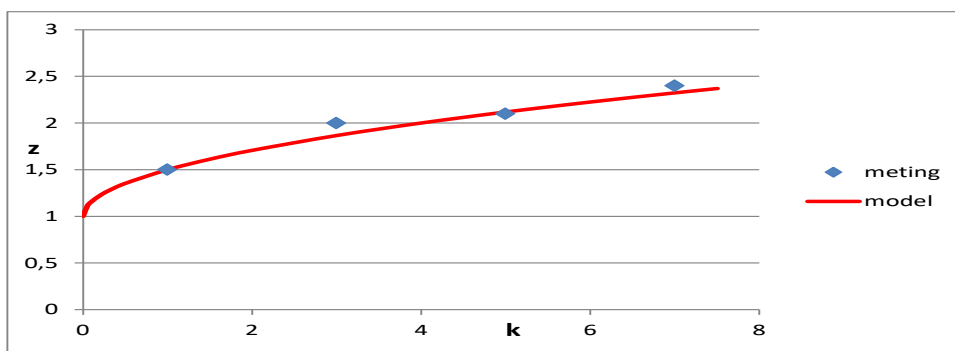
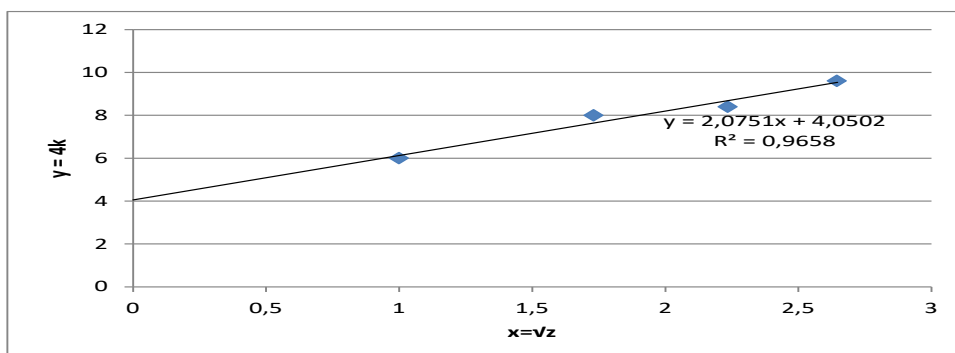
$f = -1,0$ en $s = 2,9$



De rode curve gaat niet mooi door de meetpunten heen. Dat kan 2 oorzaken hebben:

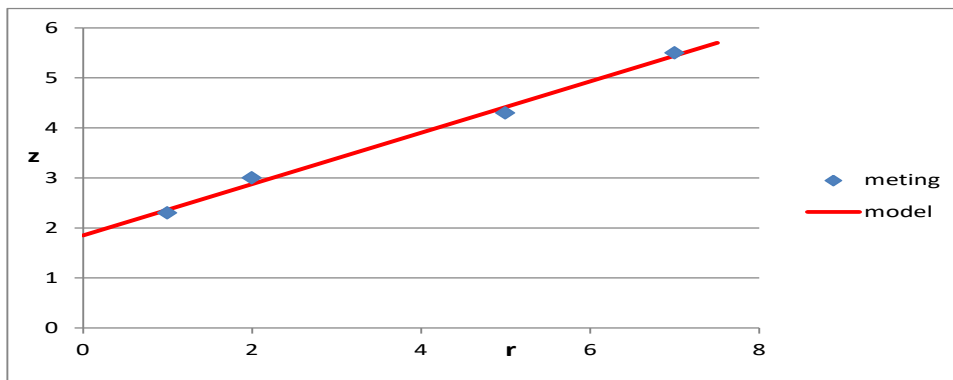
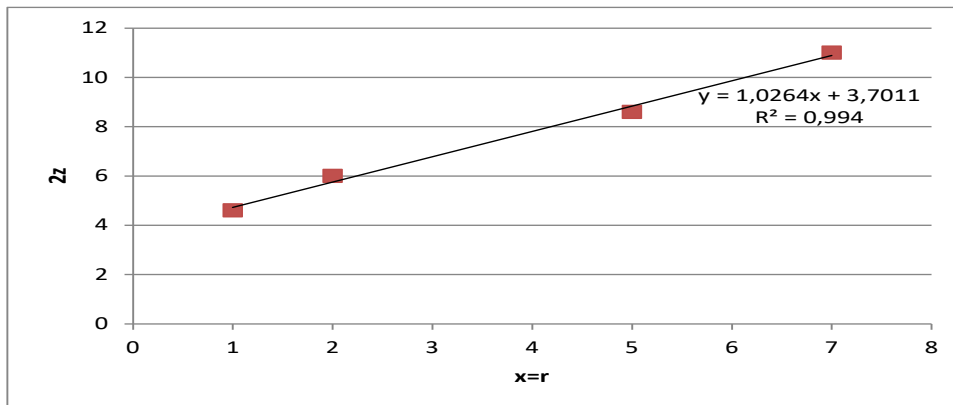
- het gelineariseerde model gaat niet goed door de meetwaarden. In de bovenste grafiek zie je, dat het gelineariseerde model juist wel goed door de meetwaarden gaat
- door afronding van de waarde van de parameters f en s krijg je een verschil tussen het model en de meetwaarden. Dat klopt, dat is hier het geval.

3. $c = 1$ en $w = -3$

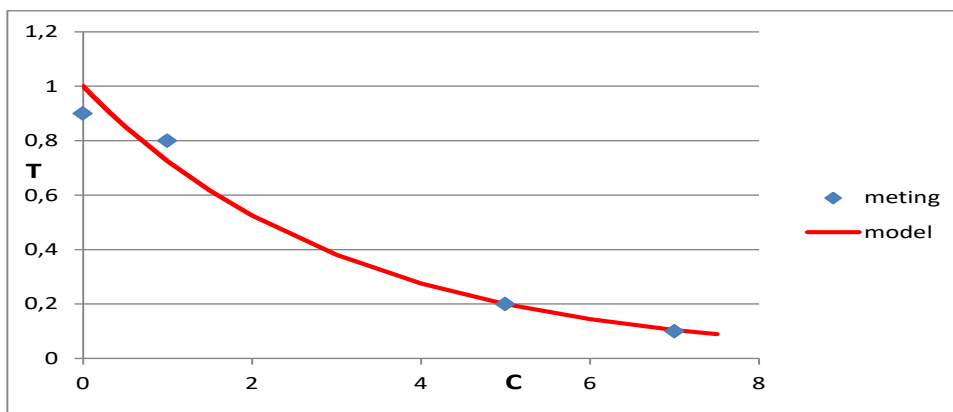
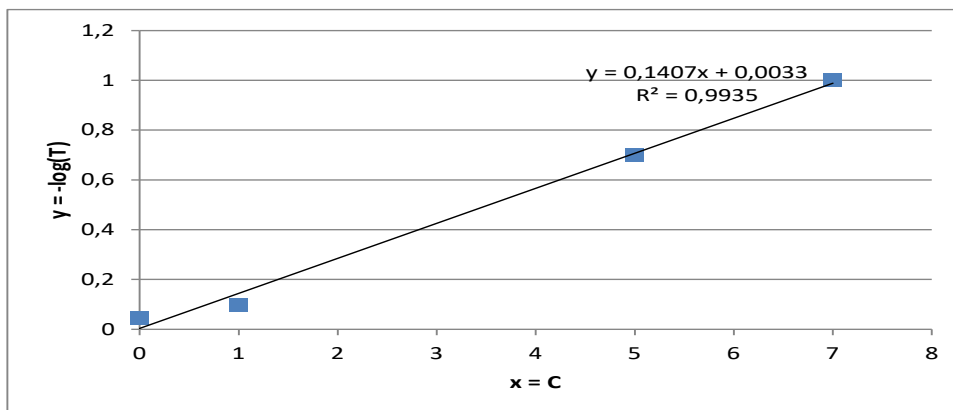


In dit geval fit het lineaire model niet helemaal goed (de rechte lijn gaat niet goed door de meetpunten in de bovenste grafiek). Toch gaat de rode curve redelijk goed door de meetpunten. Soms zit het mee.

4. $c = 3,7$ en $d = 0,038$



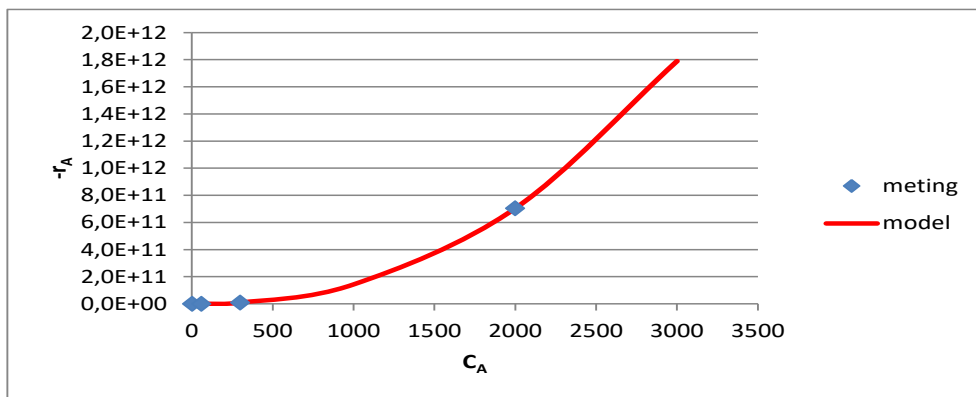
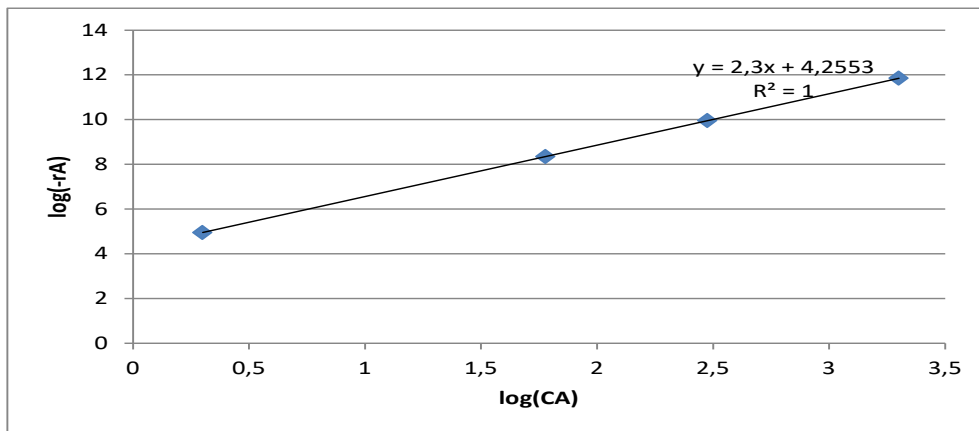
5. $a = 0,14$ en $b = 0$



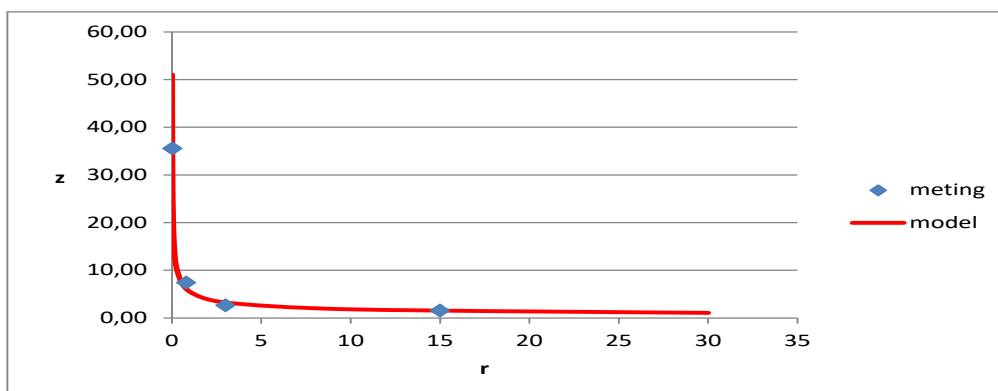
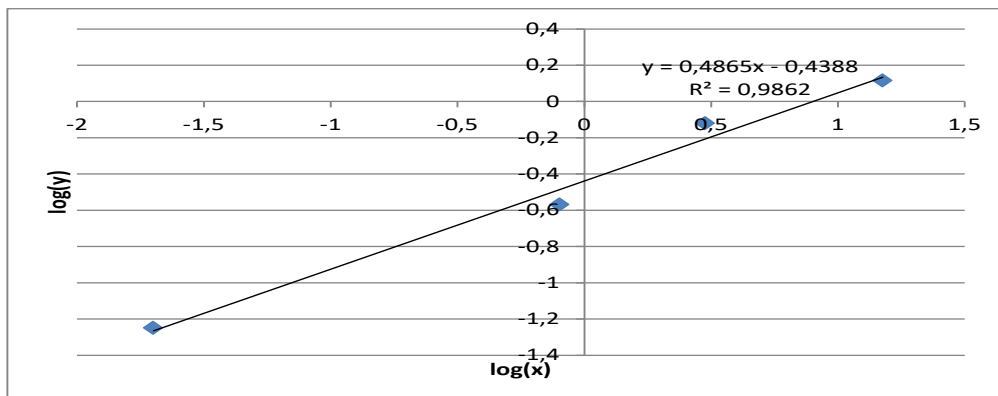
10.3 Antwoorden hoofdstuk 7

De uitwerkingen van dit hoofdstuk staan in UitwerkingenH7MachtsModellen.xlsx

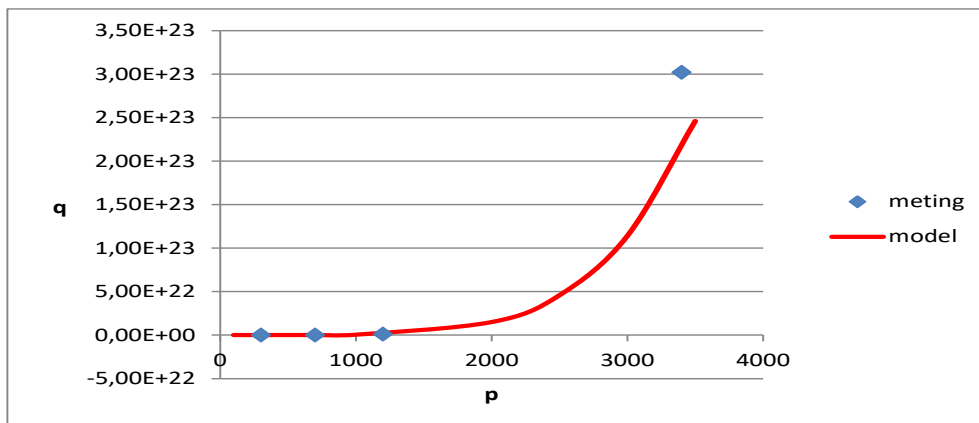
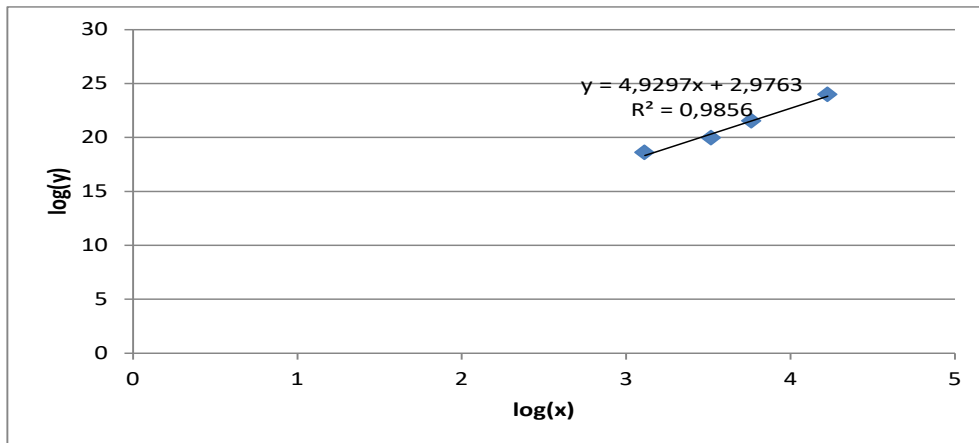
1. $k = 1,8 \cdot 10^4$ en $n = 2,3$



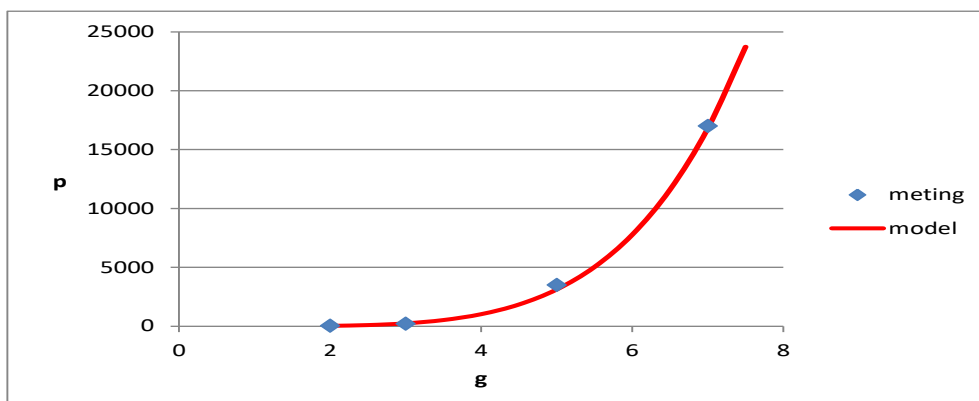
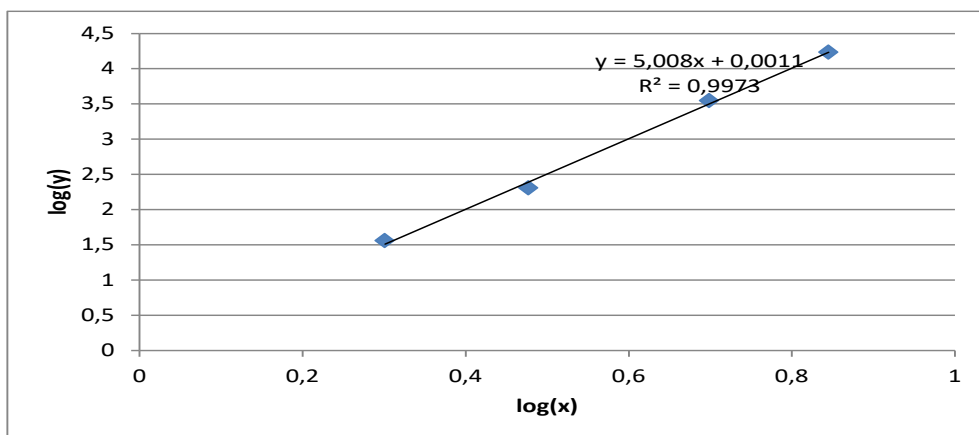
2. $d = 0,6$ en $g = 0,025$



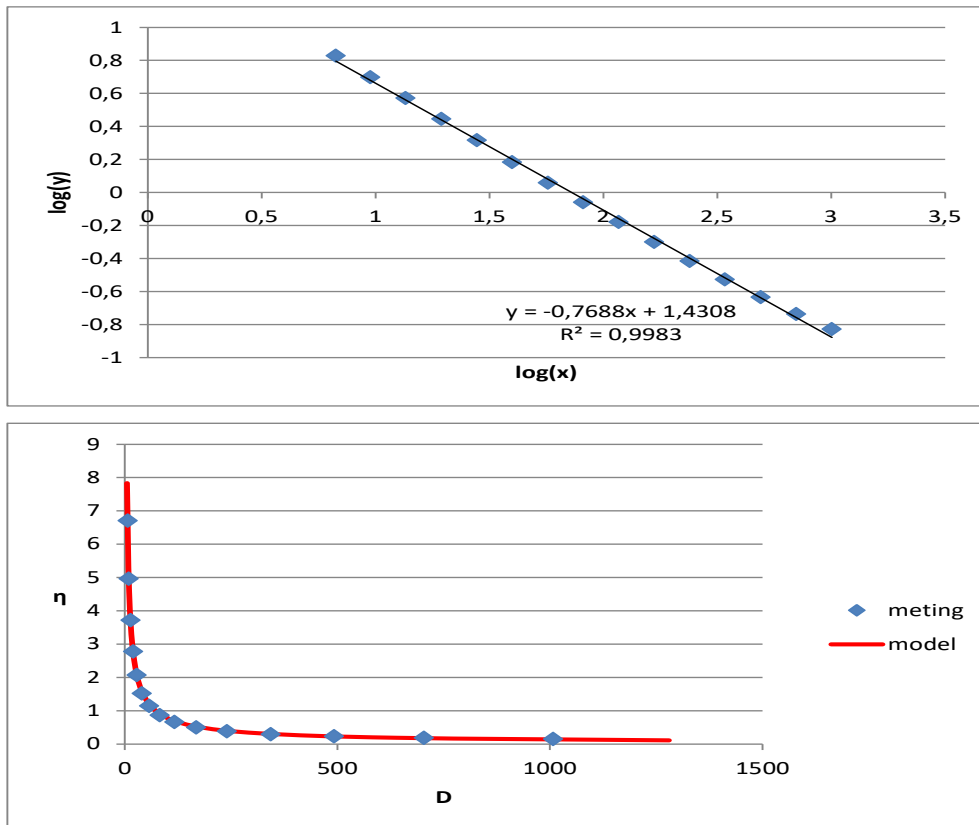
3. $u = 948$ en $i = 0,096$



4. $d = 5,0$



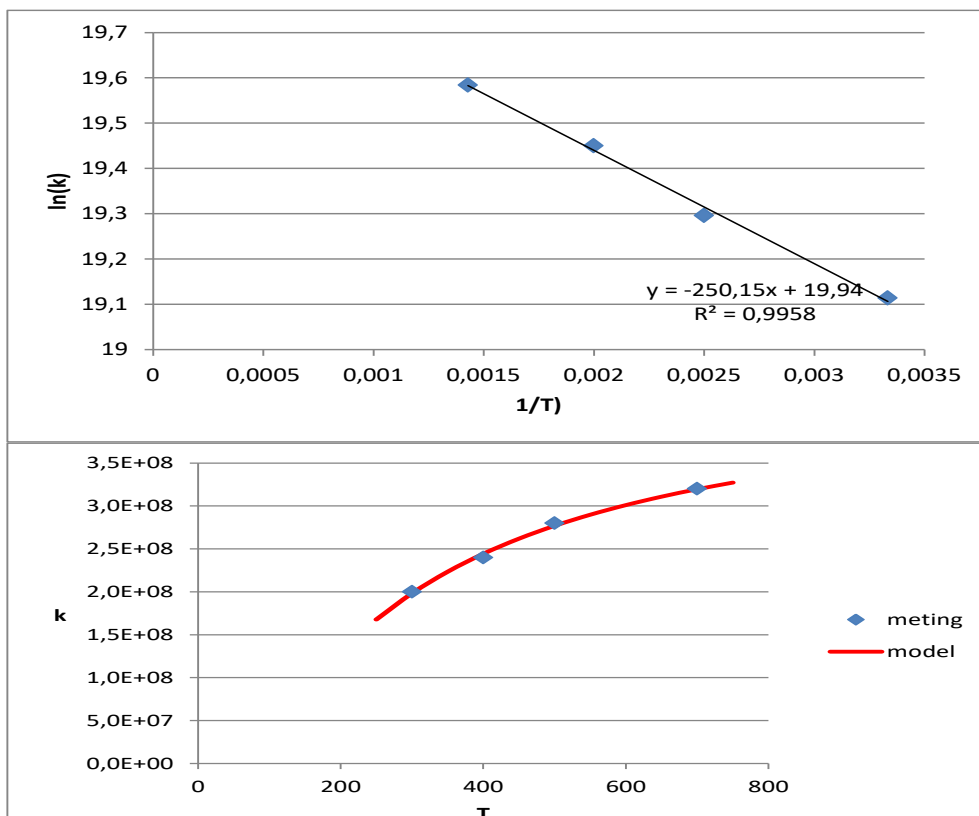
5. $n = 0,231$ en $k = 27,0$



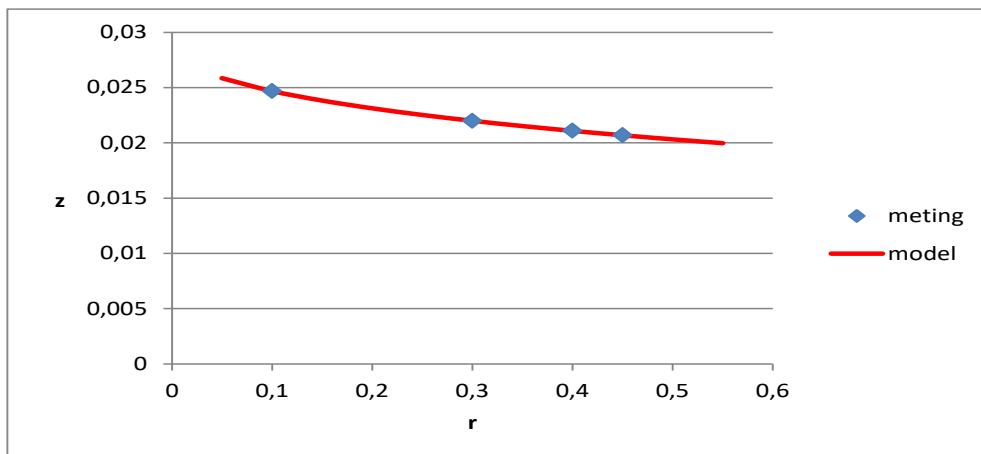
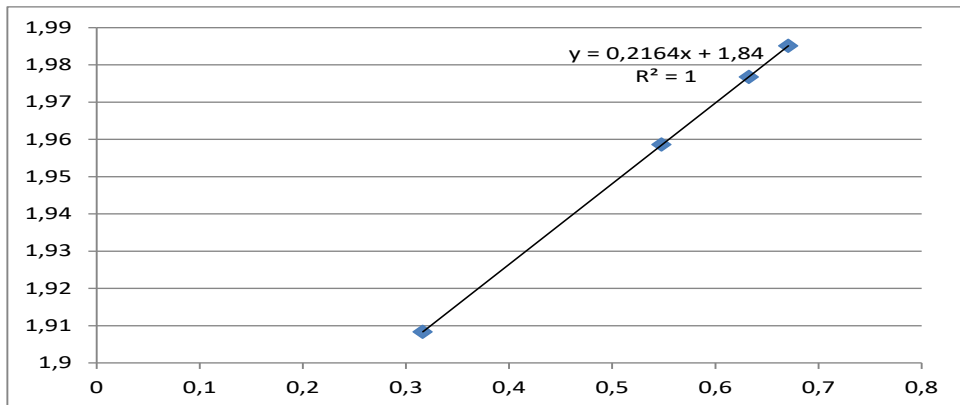
10.4 Antwoorden hoofdstuk 8

De uitwerkingen van dit hoofdstuk staan in UitwerkingenH8ExponentieleModellen.xlsx

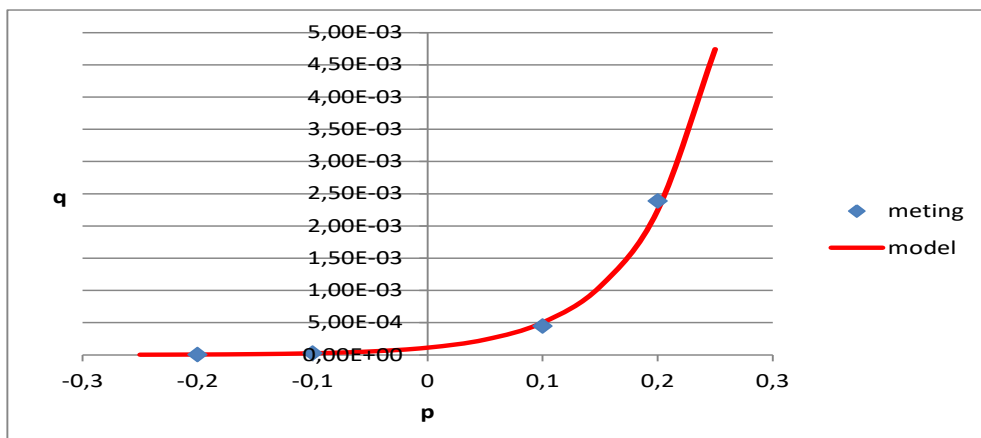
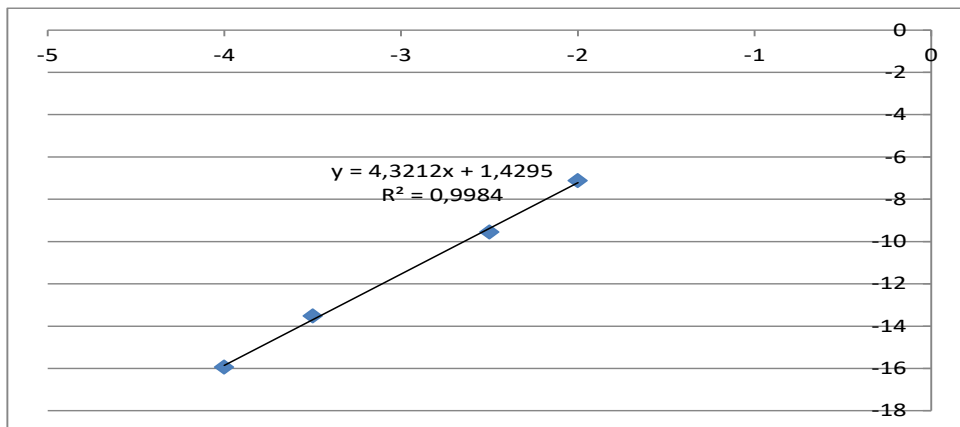
1. $E_a = 2,08 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$ en $k = 4,57 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$

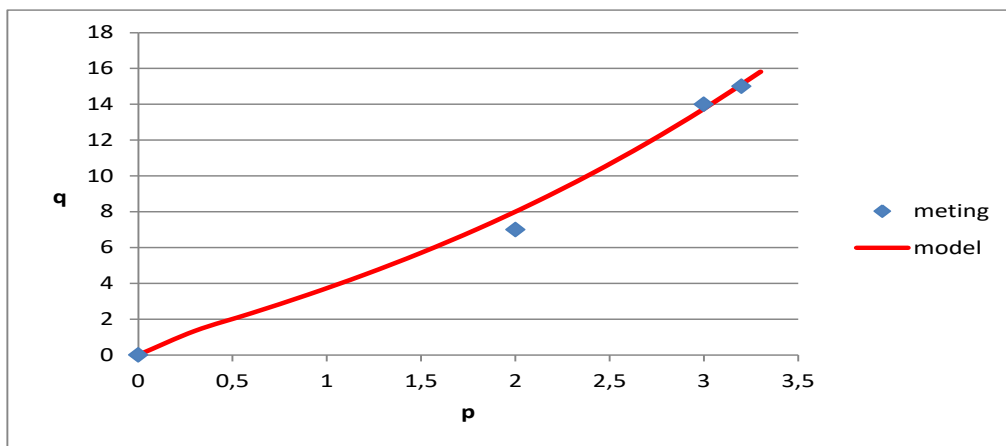
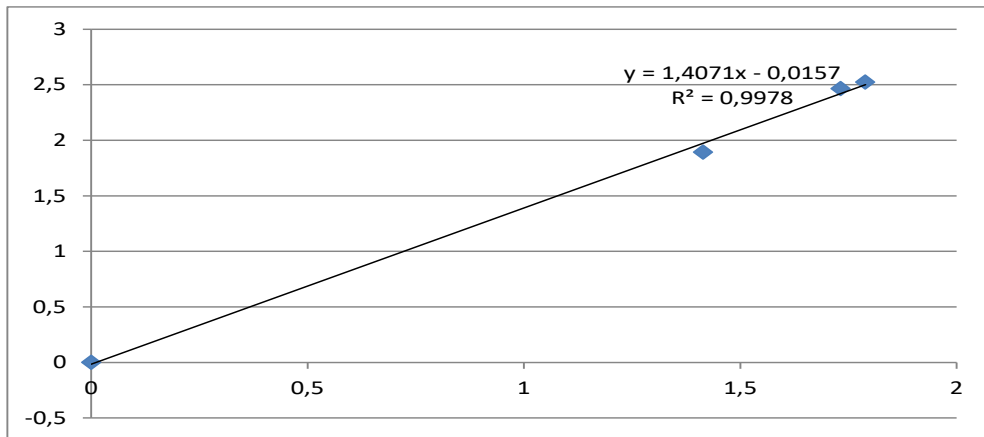
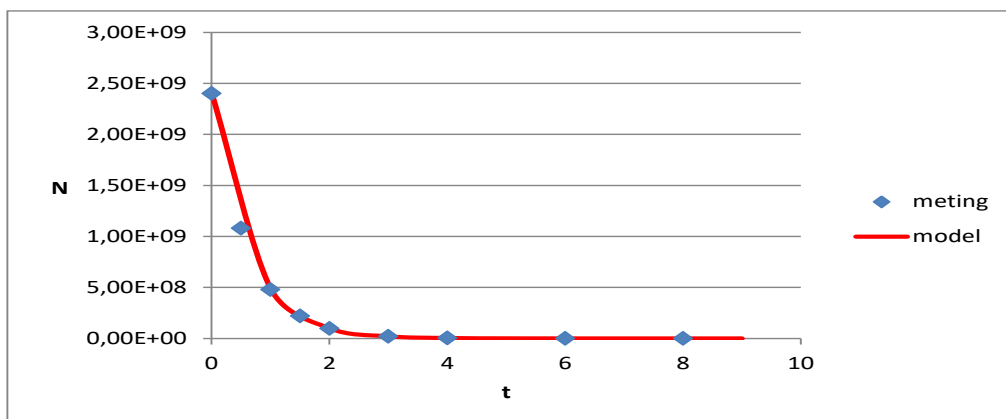
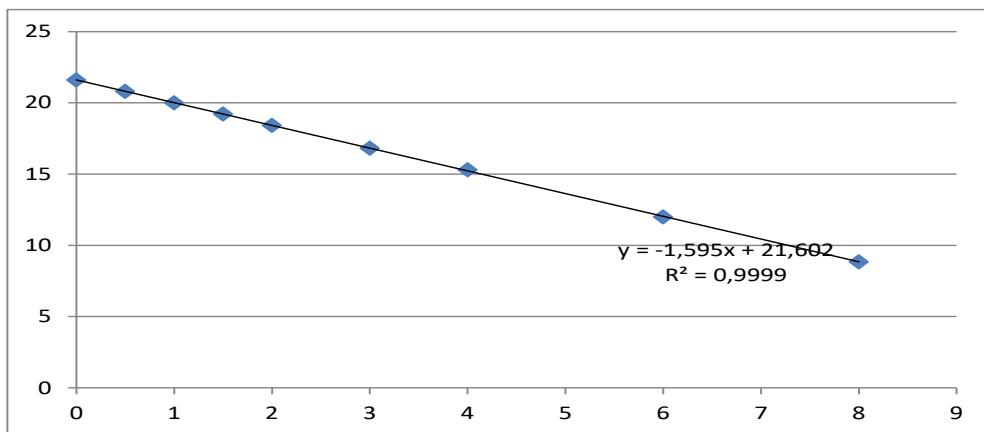


2. $d = 0,208$ en $g = 8,32$



3. $i = 1,15 \cdot 10^{-2}$ en $u = 3,69$



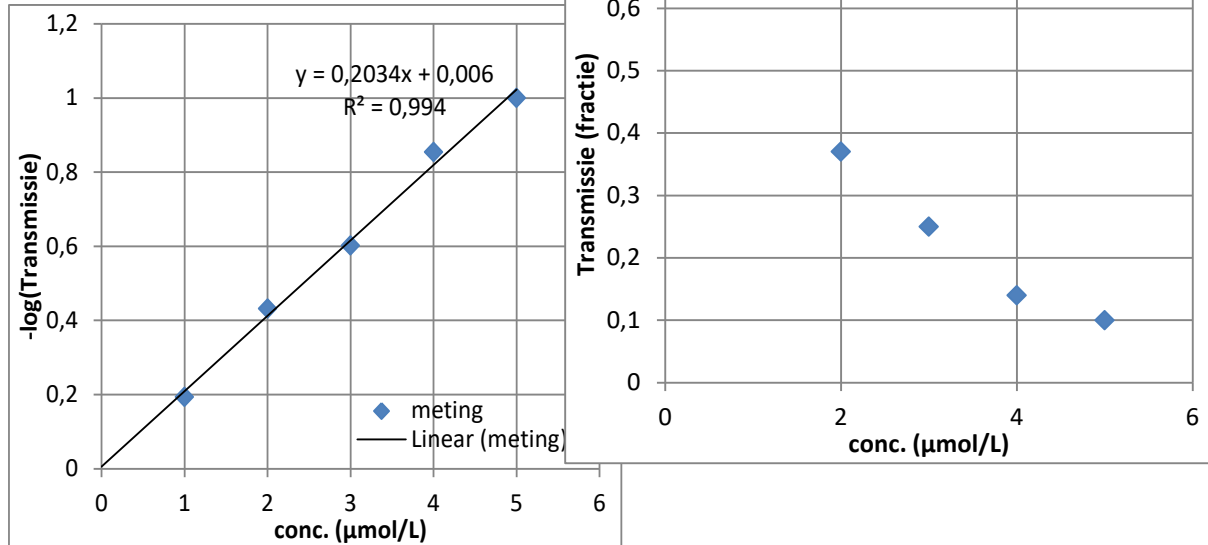
4. $d = 2$ 5. $a = -1,59$ en $b = 2,41 \cdot 10^9$ 

10.5 Antwoorden hoofdstuk 9

De uitwerkingen van deze opgaven staan in UitwerkingenH9ModellenKiezen.xlsx

1a. $C = 2,5$ dan is T ongeveer 0,3

1b. $T = 0,2$ dan is C ongeveer 3,3



2b. $C = 2,5$ dan is $-\log(T) = 0,5$ en $T = 10^{-0,5} = 0,32$

$= 0,2$ dan is $-\log(T) = 0,70$ en $C = 3,5$

3a. $\text{rico} = 0,2034$ en intercept = $0,006 \approx 0$

3b. als C verdubbelt, doet $-\log(T)$ dat ook, want het intercept = 0:

$$-\log(T)_{\text{nieuw}} = 0,20 \cdot C_{\text{nieuw}} = 0,20 \cdot (2 \cdot C_{\text{oud}}) = 2 \cdot 0,20 \cdot C_{\text{oud}} = 2 \cdot -\log(T)_{\text{oud}}$$

3c. $-\log(T)_{\text{nieuw}} = 0,20 \cdot C_{\text{nieuw}} = 0,20 \cdot (2 \cdot C_{\text{oud}}) = 2 \cdot -\log(T)_{\text{oud}} = -\log(T_{\text{oud}}^2) \quad \Leftrightarrow$

$$T_{\text{nieuw}} = T_{\text{oud}}^2$$

4. nee, dat kan niet. Stel dat een laag 60% van het zonlicht absorbeert. Een dubbele laag zou dan 120% van het zonlicht absorberen en dat is niet mogelijk.

5a. met het exponentiele model:

$$y = b \cdot \text{getal}^{ax}$$

$$y = T$$

$$x = C$$

$$T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C}$$

$$a = \epsilon \cdot l$$

$$b = 1$$

5b. $T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C} \quad \Leftrightarrow \quad -\ln(T) = -\ln(e^{-\epsilon \cdot l \cdot C}) = (\epsilon \cdot l) \cdot C$

5c. $T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C} \quad \Leftrightarrow \quad -\log(T) = -\log(e^{-\epsilon \cdot l \cdot C}) = (\epsilon \cdot l \cdot \log(e)) \cdot C$

5d. $\text{rico} = 0,20 = \epsilon \cdot l \cdot \log(e) \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon = \frac{0,2}{l \cdot \log(e)} = \frac{0,2}{0,8 \cdot 1,434} = 0,576$

eenheid: een macht heeft geen eenheid (eenheid 1), zodat $\epsilon \cdot l \cdot C$ = eenheid 1

ϵ heeft dus eenheid $\frac{1}{C \cdot l} = \mu\text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$

5e. $T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C} = 10^{\log(e^{-\epsilon \cdot l \cdot C})} = 10^{-\epsilon \cdot l \cdot C \cdot \log(e)} = 10^{-0,434 \cdot \epsilon \cdot l \cdot C}$

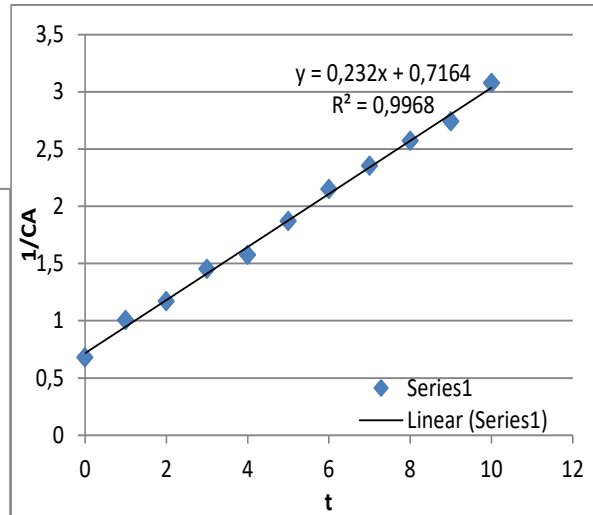
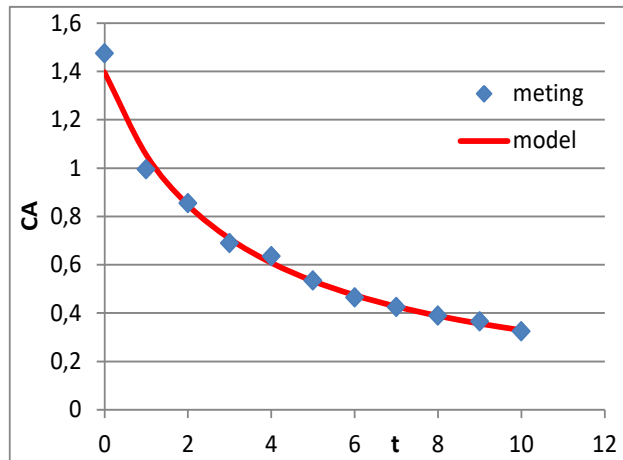
5f. $T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C} = 2^{\log_2(e^{-\epsilon \cdot l \cdot C})} = 10^{-\epsilon \cdot l \cdot C \cdot \log_2(e)} = 10^{-1,44 \cdot \epsilon \cdot l \cdot C}$

5g. $T = e^{-\epsilon \cdot l \cdot C} = e^{-0,576 \cdot 1,2 \cdot 3,5} = 0,09 = 9\%$

6. $\frac{1}{C} = a \cdot t + b$

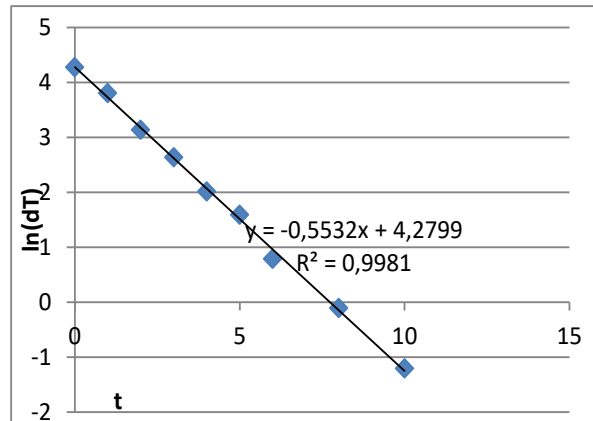
7ab. $a = 0,232$ en $b = 0,716$

$$7c. \quad \frac{1}{C_A} = 0,232 \cdot t + 0,716 \Leftrightarrow \\ C_A = \frac{1}{0,232 \cdot t + 0,716}$$



8ab. $a = -0,553$ en $b = 4,28$

$$8c. \quad \ln(dT) = -0,553 \cdot t + 4,28 \Leftrightarrow \\ dT = e^{-0,553 \cdot t + 4,28} = e^{-0,553 \cdot t} \cdot e^{4,28} = \\ 72 \cdot e^{-0,553 \cdot t}$$



9. machtsmodel

$$y = b \cdot x^a$$

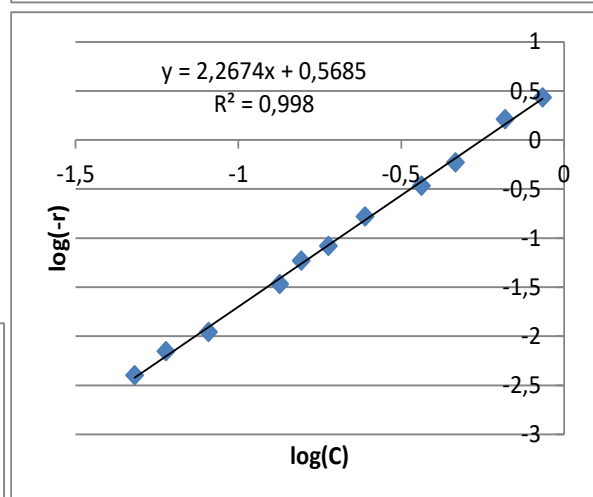
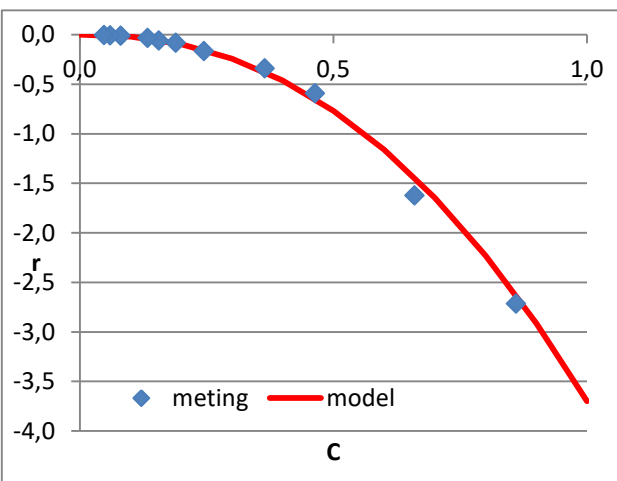
$$-r = k \cdot C^n$$

$$y = -r \text{ en } x = C \text{ en } a = n \text{ en } b = k$$

$$\text{rico} = 2,27 = a = n$$

$$\text{intercept} = 0,568 = \log(b), \text{ zodat}$$

$$b = 3,70 = k$$



11 Lijst van afbeeldingen

titelpagina: http://all-free-download.com/free-vector/download/mathematical-formula-hand-written-edition-vector_521073.html

blz 1 balans <https://pixabay.com/nl/afbeeldingen-ontwerp-3d-balans-875115/>

Alle overige figuren zijn gemaakt door J.Heijenga (docent LS&T)